

И. И. КОВАЛЕНКО

КУРС ФИЗИКИ

В 6 частях

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИBOROСТРОЕНИЯ

И. И. Коваленко

Часть 3

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ



УДК 537(075)
ББК 22.33я73
К56

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент Российской академии естественных наук *Н. Р. Галль*;
доктор физико-математических наук *С. П. Помыткин*

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Протокол № 3 от 27 марта 2020 г.

Коваленко, И. И.

К56 Курс физики: учеб. пособие: в 6 ч. Ч. 3: Электричество и магнетизм / И. И. Коваленко. – СПб.: ГУАП, 2020. – 143 с.

ISBN 978-5-8088-1480-6

Приведен теоретический материал по курсу «Физика». Главное внимание уделено разъяснению сути физических законов и их осмысленному применению.

В третьей части представлены разделы «Электричество» и «Магнетизм», которые в большинстве вузов изучаются во II семестре. Объем пособия рассчитан на изучение дисциплины в течение трех-четырех семестров.

Предназначено для студентов и преподавателей вузов всех технических направлений и специальностей. Соответствует рабочим программам по дисциплине «Физика» в рамках ФГОС++.

УДК 537(075)
ББК 22.33я73

ISBN 978-5-8088-1480-6

© Санкт-Петербургский государственный
университет аэрокосмического
приборостроения, 2020

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

1. Взаимодействие электрических зарядов. Закон сохранения заряда

С древних времен люди наблюдали проявления атмосферного электричества – *молнию*. Свыше двух тысяч лет известна еще одна группа электрических явлений – *электризация трением*. Лишь в XVIII в. было доказано, что молнии и искорки, возникающие при расчесывании волос, – одно и то же явление – электрический разряд.

Электромагнитные взаимодействия – фундаментальные. Очень многие окружающие нас силы сводятся к электромагнитным силам между частицами вещества, но сами электромагнитные взаимодействия не сводятся ни к каким другим. Столь же фундаментальными являются *гравитационные* взаимодействия. Электромагнитные силы имеют ряд существенных отличий от гравитационных:

- 1) взаимодействуют только заряженные тела;
- 2) заряженные тела могут как притягиваться, так и отталкиваться;
- 3) электромагнитное взаимодействие заряженных тел на много порядков превышает их гравитационное взаимодействие.

Электрический заряд – это величина, определяющая силу электромагнитного взаимодействия между телами. Мы имеем дело с принципиально новыми явлениями, которые не сводятся ни к механическим, ни к тепловым. Поэтому логически точного определения электрическому заряду дать невозможно. В подобных случаях определение дается через процедуру измерения.

При электрическом взаимодействии заряды могут притягиваться или отталкиваться. Есть два вида электрических зарядов – положительные и отрицательные. Заряды разных знаков притягиваются друг к другу, а заряды одного знака друг от друга отталкиваются. Это проиллюстрировано на рис. 1.1.

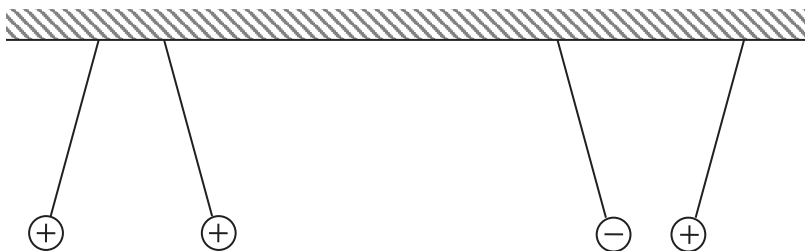


Рис. 1.1. Взаимодействие одноименных и разноименных зарядов

Отметим, что для микрочастиц заряд является их неотъемлемым свойством. Все электрические заряды кратны элементарному заряду $-e$.

Макроскопические тела всегда содержат в себе огромное число заряженных элементарных частиц. Если число положительных и отрицательных частиц одинаково, то тело в целом нейтрально. Наличие отрицательного или положительного заряда тела связано с избытком или с недостатком в теле мельчайших отрицательно заряженных частиц – электронов.

Заряды не создаются и не пропадают, они могут быть лишь переданы от одного тела другому или перемещены внутри данного тела.

Это положение, известное под названием закона сохранения электрического заряда, является основным в области учения об электричестве и подтверждается многочисленными фактами.

Точечным зарядом называется заряженное тело с очень малыми размерами – много меньшими расстояний до точки наблюдения. Фактически *точечный заряд* – это заряженная материальная точка.

Закон Кулона:

два точечных электрических заряда взаимодействуют с силой, пропорциональной величине произведения зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Независимо от знаков зарядов q_1 и q_2 (рис. 1.2) для величины силы взаимодействия справедливо выражение

$$F \sim \frac{|q_1 q_2|}{r^2}.$$

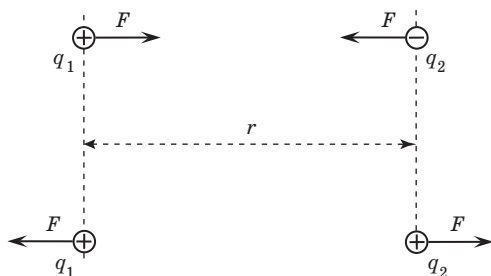


Рис. 1.2. Силы Кулона

В системе единиц CGS (сантиметр – грамм – секунда) знак пропорциональности заменяется знаком равенства:

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{r^2},$$

и единица измерения электрического заряда выражается через механические единицы:

$$[q] = [\sqrt{F}][r].$$

В международной системе единиц SI в закон Кулона вводится коэффициент пропорциональности k , или ϵ_0 , имеющий размерность

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \quad (1.1)$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \quad (1.2)$$

Электрический заряд измеряется в кулонах, причем кулон – составная единица, которая выражается через ампер¹ и секунду.

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2, \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / \text{Н} \cdot \text{м}^2,$$

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Формулы (1.1) и (1.2) задают процедуру измерения электрического заряда.

¹ 1 Кл = 1 А·с, определение 1 ампера будет дано позже, в разделе «Магнетизм».

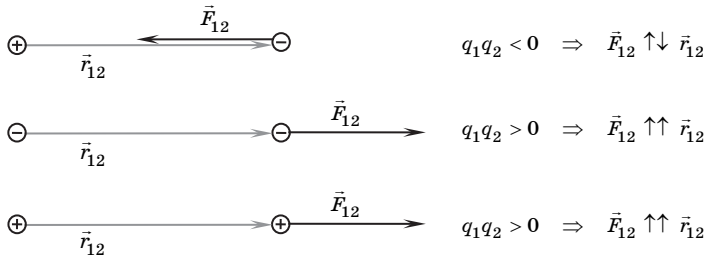


Рис. 1.3. Направление силы Кулона

Любая сила – векторная величина. Пусть нас интересует сила \vec{F}_{12} , действующая на второй точечный заряд со стороны первого. Если заряды одноименные, то направление этой силы совпадает с направлением вектора \vec{r}_{12} , соединяющего точку 1 с точкой 2. Если заряды разноименные, то направление силы противоположное. Все сказанное можно учесть, умножив величину силы на единичный вектор, направленный вдоль вектора \vec{r}_{12} :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}. \quad (1.3)$$

Направления этой силы для различных знаков зарядов показаны на рис. 1.3.

Формула (1.3) задает *центральную силу*, которая всегда потенциальна. Следовательно, можно получить выражение для потенциальной энергии взаимодействия электрических зарядов.

Сначала нужно выбрать точку, в которой потенциальная энергия будет равна нулю. Удаленные на бесконечность электрические заряды не взаимодействуют друг с другом. Резонно считать, что потенциальная энергия взаимодействия зарядов равна нулю именно на бесконечности.

Пусть заряд q_1 находится в начале координат, заряд q_2 – в точке \vec{r} . Символом \vec{r}_∞ обозначим точку на бесконечном удалении от начала координат, где потенциальная энергия равна нулю. Согласно определению, потенциальная энергия в точке \vec{r} равна работе силы Кулона по перемещению заряда q_2 из точки \vec{r} на бесконечность:

$$W = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_\infty} (\vec{F} d\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{(\vec{r} d\vec{r})}{r}.$$

Поскольку скалярное произведение $(\vec{r}d\vec{r})$ равно произведению длин тех же векторов¹, получаем:

$$W = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{r dr}{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_r^\infty = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \infty} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Таким образом, потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов равна

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.4)$$

2. Напряженность и потенциал электрического поля

Электрические заряды взаимодействуют друг с другом на расстоянии при помощи электрического поля. Сила Кулона и потенциальная энергия – это характеристики взаимодействия. Если поместить пробный заряд q в поле других зарядов-источников $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$, то на него будет действовать сила, равная векторной сумме сил взаимодействия с каждым зарядом (рис. 2.1):

$$\vec{F} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i} = q \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i} = q \sum_i \vec{E}_i = q \vec{E}.$$

Сила, действующая на электрический заряд во внешнем поле, зависит от величины самого заряда q и от векторной характеристики электрического поля – от его напряженности:

$$\vec{F} = q \vec{E}. \quad (2.1)$$

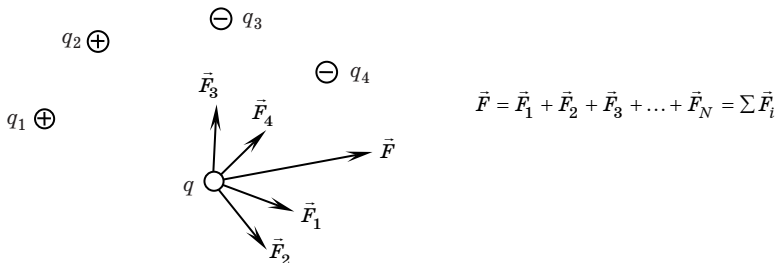


Рис. 2.1. Силы, действующие на электрический заряд

¹ $(\vec{r} \vec{r}) = r^2, \Rightarrow d(\vec{r} \vec{r}) = d(r^2), \Rightarrow (d\vec{r} \vec{r}) + (\vec{r} d\vec{r}) = 2r dr, \Rightarrow (\vec{r} d\vec{r}) = r dr.$

Напряженность электрического поля \vec{E} равна силе, действующей на единичный заряд в изучаемом поле.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (2.2)$$

Напряженность не зависит от величины внесенного в поле пробного заряда, а зависит лишь от положения и величин зарядов-источников. Даже если в поле вообще не вносить пробный заряд, напряженность электрического поля все равно будет существовать и иметь значение:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_i. \quad (2.3)$$

Суммирование ведется по всем источникам электрического поля. Каждый заряд-источник в отдельности создает кулоновское поле с напряженностью

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_i. \quad (2.4)$$

Результирующая напряженность есть векторная сумма напряженностей, созданных каждым источником в отдельности:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i. \quad (2.5)$$

Полученное утверждение называется *принципом суперпозиции* для напряженности электрического поля.

Заряд q , помещенный в поле других зарядов $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$, имеет потенциальную энергию, которая складывается из энергий взаимодействия с каждым зарядом:

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{r_i} = q \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} = q\phi. \quad (2.6)$$

Потенциальная энергия электрического заряда во внешнем поле зависит от величины самого заряда q и от скалярной характеристики электрического поля – от его потенциала:

$$W = q\phi. \quad (2.7)$$

Потенциал электрического поля ϕ равен потенциальной энергии единичного заряда, внесенного в изучаемое поле:

$$\phi = \frac{W}{q}. \quad (2.8)$$

Потенциал не зависит от величины пробного заряда, а зависит лишь от положения и от величин зарядов-источников. Даже если в поле вообще не вносить пробный заряд, потенциал электрического поля все равно будет существовать и иметь значение

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}. \quad (2.9)$$

Суммирование ведется по всем источникам электрического поля. Каждый заряд-источник в отдельности создает кулоновское поле с потенциалом

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}. \quad (2.10)$$

Результирующий потенциал есть алгебраическая сумма потенциалов, созданных каждым источником в отдельности:

$$\varphi = \sum \varphi_i. \quad (2.11)$$

Полученное утверждение называется *принципом суперпозиции* для потенциала электрического поля.

В Международной системе единиц СИ потенциал измеряется в вольтах:

$$В = \text{Дж/Кл},$$

а напряженность – в вольтах, деленных на метр.

В нашем распоряжении имеются две характеристики электрического поля: силовая характеристика – напряженность – и энергетическая характеристика – потенциал. Обе они зависят от расположения зарядов – источников поля – и не зависят от внесенного в поле пробного электрического заряда. Для обеих характеристик справедлив принцип суперпозиции. Этот принцип утверждает, что электрические поля от различных источников складываются, не влияя друг на друга. Он справедлив в случае, когда пробный заряд не вызывает перемещения зарядов – источников поля, и сами эти заряды, будучи собранными вместе, остаются там, где их разместили. Это наблюдается не всегда.

В случаях непрерывного распределения электрического заряда по объему, по поверхности или вдоль линии выбираются элементарные, т. е. малые заряженные области, которые можно считать точечными зарядами. Суммирование по всем источникам поля заменяется интегрированием по заряженной области.

Переместим заряд q в электрическом поле по замкнутой траектории и вернемся в исходную точку. Совершенная при этом работа будет вычисляться по формуле

$$A = \oint_{(\ell)} (\vec{F} d\vec{\ell}) = \oint_{(\ell)} (q\vec{E} d\vec{\ell}) = q \oint_{(\ell)} (\vec{E} d\vec{\ell}).$$

Поскольку электрическое поле потенциально, работа сил по замкнутой траектории равна нулю. Таким образом, получаем утверждение:

$$\oint_{(\ell)} (\vec{E} d\vec{\ell}) = 0. \quad (2.12)$$

Стоящий слева интеграл называется *циркуляцией*, а доказанное утверждение – теоремой о циркуляции вектора \vec{E} .

Циркуляция вектора \vec{E} в электростатическом поле равна нулю.

3. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Майкл Фарадей предложил метод изображения электростатических полей с помощью силовых линий (линий напряженности).

Силовыми линиями называются кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности поля.

Силовым линиям приписывается направление, совпадающее с направлением вектора \vec{E} . Они направлены от положительных зарядов к отрицательным, как показано на рис. 3.1.

Поскольку в каждой точке пространства вектор \vec{E} имеет единственное направление, линии напряженности не пересекаются. Если электрическое поле однородное или центральное, то силовые линии прямые, как на рис. 3.2. Во всех остальных случаях (рис. 3.3; 3.4) они искривлены.

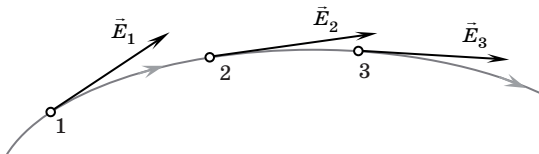


Рис. 3.1. Направление силовой линии

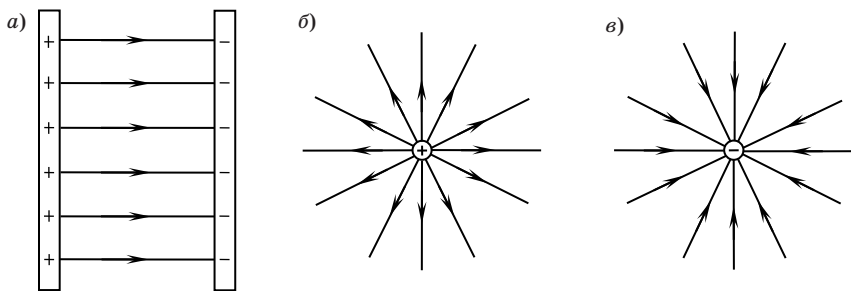


Рис. 3.2. Силовые линии для однородного (а) и центрального (б, в) полей

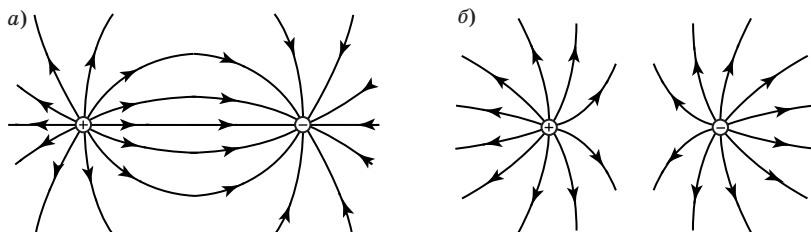


Рис. 3.3. Силовые линии разноименных (а) и одноименных (б) точечных зарядов

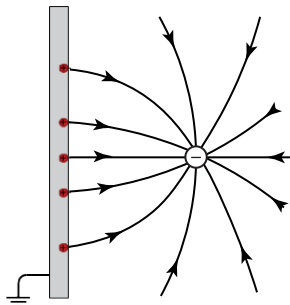


Рис. 3.4. Силовые линии отрицательного точечного заряда и плоскости

Суперпозиция однородных полей является однородным полем.
Суперпозиция центральных полей не является центральным полем.

Суперпозиция однородного и центрального полей не является ни однородным, ни центральным полем.

Суперпозиция любых электрических полей всегда потенциальна.

На рис. 3.3; 3.4 показаны силовые линии от двух точечных зарядов и от точечного заряда рядом с заземленной плоскостью. Из этих рисунков видно, что:

- силовые линии во всех случаях искривлены;
- в непосредственной близости от зарядов картина силовых линий практически такая же, как и на рис. 3.2;
- силовые линии выходят из плоскости перпендикулярно к ее поверхности;
- линии могут уходить на бесконечность или приходить с бесконечности.

Силовые линии поля не следует отождествлять с траекториями, по которым движутся легкие заряженные частицы в электрическом поле. Движение частиц происходит вдоль силовой линии лишь в случае, если эта линия прямая и начальная скорость направлена вдоль нее.

Величину вектора напряженности задает густота силовых линий, т. е. число линий, пересекающих единичную поверхность, расположенную перпендикулярно к ним.

Потенциал электростатического поля представляет собой функцию, меняющуюся от точки к точке, однако всегда можно выделить совокупность точек, потенциалы которых одинаковы.

Эквипотенциальные поверхности – это поверхности равного потенциала.

Очевидно, что работа перемещения заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю.

Найдем поверхности равного потенциала в поле точечного заряда. Потенциал точечного заряда задается формулой (2.10):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где r – расстояние от заряда q до точки, где измеряется потенциал; ϵ_0 – мировая константа. Следовательно, поверхность постоянного потенциала будет поверхностью с постоянным радиусом, т. е. сферой. На рис. 3.5. показаны поверхности равного потенциала для точечного заряда и для однородного поля.

На рис. 3.6. показана эквипотенциальная поверхность и пересекающая ее силовая линия. Переместим заряд по эквипотенциали на малое расстояние $d\vec{r}$.

Работа по переносу заряда равна $dA = (\vec{F}d\vec{r}) = q(\vec{E}d\vec{r})$. С другой стороны, $dA = -qd\varphi = 0$. Следовательно, $(\vec{E}d\vec{r}) = 0$. Значит, косинус угла между векторами \vec{E} и $d\vec{r} = 0$, т. е. $\vec{E} \perp d\vec{r}$.

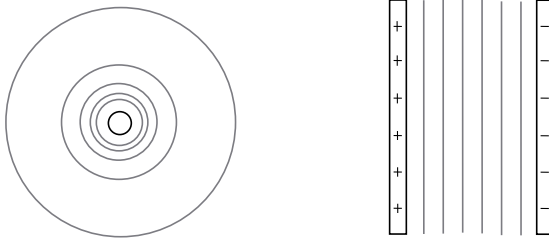


Рис. 3.5. Эквипотенциали в поле точечного заряда и в однородном поле

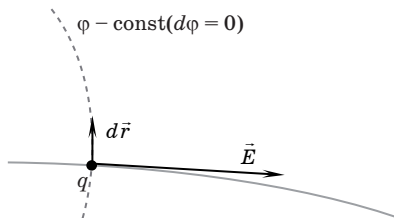


Рис. 3.6. Перемещение заряда по эквипотенциальной поверхности

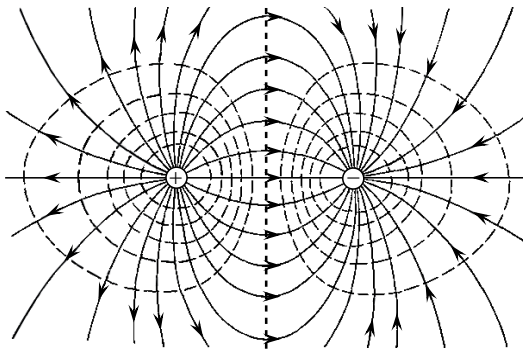


Рис. 3.7. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности для двух точечных разноименных зарядов

Доказано, что

— силовые линии всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

На рис. 3.7 показаны силовые линии (сплошные) и эквипотенциальные поверхности (пунктирные) для системы двух точечных разноименных зарядов.

В заключение отметим, что силовые линии – это именно *линии*, а эквипотенциальные поверхности – это именно *поверхности*. Линии – одномерные, а поверхности – двумерные. Они похожи друг на друга лишь на двумерных картинках, где показано *сечение* эквипотенциальных поверхностей. В действительности все приведенные картинки трехмерные.

4. Связь напряженности и потенциала электрического поля

Силы электрического поля потенциальны, а, как известно, работа потенциальной силы равна обратной разности потенциальных энергий:

$$A = W_1 - W_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4.1)$$

С другой стороны,
$$A = \int (\vec{F} d\vec{r}) = q \int (\vec{E} d\vec{r}). \quad (4.2)$$

Сравнивая эти выражения, получаем связь разности потенциалов с напряженностью электрического поля в интегральной

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{E} d\vec{r}) \quad (4.3)$$

и в дифференциальной форме
$$d\varphi = -(\vec{E} d\vec{r}). \quad (4.4)$$

Запишем скалярное произведение через произведения соответствующих компонент векторов¹

$$d\varphi = -(\vec{E} d\vec{r}) = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz). \quad (4.5)$$

Теперь учтем, что потенциал – функция, зависящая от трех координат

$$\varphi = \varphi(x, y, z); \Rightarrow d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \quad (4.6)$$

Приравниваем правые части формул (4.5), (4.6) и получаем три равенства для трех проекций вектора \vec{E} :

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Для вектора напряженности в целом получаем выражение

$$\vec{E} = -\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = -\text{grad } \varphi; \quad (4.7)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi.$$

¹ $(\vec{a}\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$

Градиент как вектор имеет направление, в котором скалярная величина φ возрастает быстрее всего. Величина градиента равна скорости возрастания скалярной величины φ в этом направлении, т. е. равна частной производной

$$|\text{grad } \varphi| = \frac{\partial \varphi}{\partial \ell}. \quad (4.8)$$

Вектор напряженности электрического поля имеет направление, в котором потенциал поля быстрее всего убывает. Графически это значит, что вектор \vec{E} направлен по кратчайшему пути к ближайшей эквипотенциальной поверхности.

5. Напряженность и потенциал электрического диполя

Электрическим диполем называется два одинаковых по величине разноименных точечных заряда, отстоящих друг от друга на расстоянии ℓ . Вектор $\vec{\ell}$, проведенный из отрицательного заряда в положительный, называется *плечом диполя*. В случае, когда расстояние до точки наблюдения $r \gg \ell$, диполь называется точечным. Назовем на рис. 5.1 левый отрицательный заряд q_1 , а правый положительный $-q_2$. Введем обозначение $q = |q_1| = q_2$.

Вектор $\vec{p} = q\vec{\ell}$ называется *электрическим дипольным моментом*.

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Поскольку $\vec{E}_1 \uparrow \vec{E}_2$, $\Rightarrow E = E_2 - E_1$.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r_1^2 - r_2^2)}{r_1^2 r_2^2} = \frac{q(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{4\pi\epsilon_0 (r_1 r_2)^2}.$$

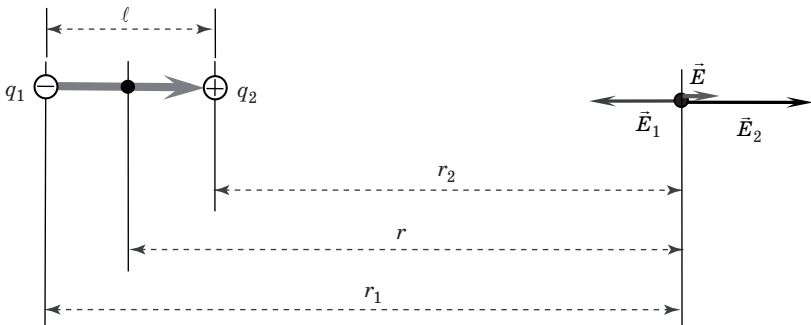


Рис. 5.1. Продольная составляющая вектора \vec{E} для электрического диполя

Учитывая, что $r_1 - r_2 = \ell$, $r_1 + r_2 = 2r$, $r_1 r_2 \approx r^2$, а $q\ell = p$, получаем

$$E = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (5.1)$$

Теперь найдем напряженность электрического поля в перпендикулярном вектору $\vec{\ell}$ направлении, как это показано на рис. 5.2. Поскольку диполь точечный, считаем, что $r_1 = r_2 = r$. Заряды q_1 и q_2 создают в точке наблюдения одинаковые по величине, но немного не параллельные векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 . Их длины равны

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Результирующий вектор \vec{E} направлен, как это показано на рис. 5.2. Треугольник векторов $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}$ подобен треугольнику r_1, r_2, ℓ , поэтому имеем:

$$\frac{E}{E_1} = \frac{\ell}{r}; \Rightarrow E = \frac{E_1 \ell}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\ell}{r} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (5.2)$$

Получилось значение, в 2 раза меньшее, чем по формуле (5.1).

Рассмотрим общий случай, показанный на рис. 5.3, когда вектор \vec{r} направлен под произвольным углом θ к вектору \vec{p} .

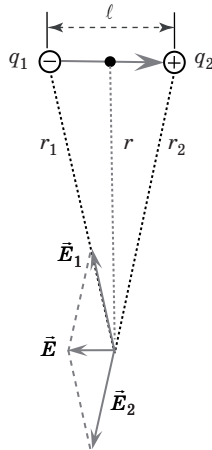


Рис. 5.2. Поперечная составляющая вектора \vec{E} для электрического диполя

Повторим выкладки, сделанные при выводе формулы (5.1), учитывая, что $r_1 - r_2 = \ell \cos\theta$. Для продольной составляющей вектора напряженности электрического диполя в этом случае получим:

$$E_{\parallel} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cos\theta. \quad (5.3)$$

Вернемся к формуле (5.2) для произвольного угла θ , как показано на рис. 5.4.

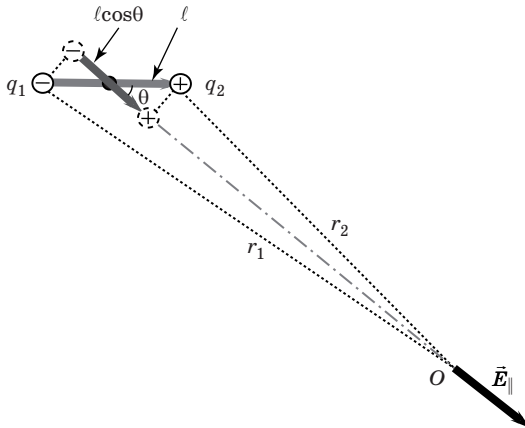


Рис. 5.3. К выводу формул (5.3) и (5.6)

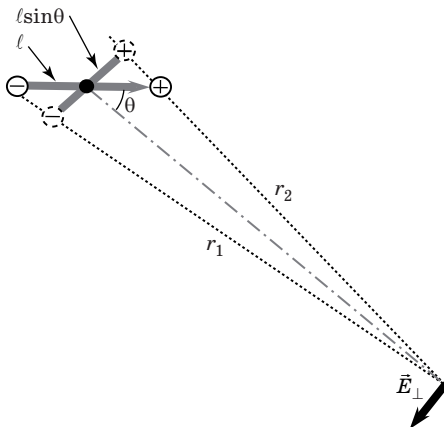


Рис. 5.4. К выводу формулы (5.4)

Использованная при выводе формулы пропорция переписывается в виде

$$\frac{E}{E_1} = \frac{\ell \sin \theta}{r}.$$

Следовательно, поперечная составляющая вектора напряженности электрического поля точечного диполя равна

$$E_{\perp} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta. \quad (5.4)$$

В общем случае (рис. 5.5), когда точка наблюдения лежит не на оси диполя и не на перпендикуляре к ней, напряженность электрического поля, создаваемого этим диполем, будет иметь две компоненты (5.3) и (5.4). Первая из них направлена вдоль радиус-вектора, а вторая – перпендикулярно к нему.

$$E = \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{4\pi\epsilon_0 r^3}{2p \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta.$$

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}. \quad (5.5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta. \quad (5.6)$$

Снова обратимся к рис. 5.3 и найдем потенциалы, создаваемые первым и вторым зарядами в точке O .

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2};$$

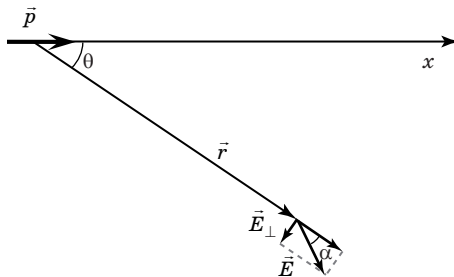


Рис. 5.5. Направление вектора напряженности точечного диполя

Учтем, что диполь точечный, т. е. $r_1 r_2 = r^2$, и то, что $r_1 - r_2 = l \cos \theta$.

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2}; \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta. \quad (5.7)$$

Подведем итоги.

1. Поле точечного диполя не центральное. Это значит, что вектор напряженности направлен не вдоль радиус-вектора. Потенциал зависит от угла.

2. Напряженность и потенциал точечного диполя уменьшаются с расстоянием быстрее, чем для точечного заряда.

6. Электрический диполь во внешнем поле

Сначала рассмотрим диполь в однородном электрическом поле.

Однородным называется такое электрическое поле, для которого вектор напряженности имеет постоянное значение и направление в изучаемой области.

1. Сила, действующая на диполь в однородном электрическом поле (рис. 6.1).

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q_1 \vec{E} + q_2 \vec{E} = (q_1 + q_2) \vec{E} = 0.$$

$$(q_1 = -q_2) \nearrow$$

Сила, действующая на диполь в однородном поле, равна нулю.

2. Момент сил, действующий на диполь в однородном поле.

На диполь в однородном электрическом поле действуют две силы, одинаковые по величине, противоположные по направлению, т. е. *пара сил*. Воспользуемся свойством¹ момента пары сил:

$$\vec{M} = [\vec{r}_1 \vec{F}_2].$$

$$\vec{M} = [\vec{r} q \vec{E}] = q [\vec{r} \vec{E}] = [\vec{p} \vec{E}].$$

¹ Доказательство приведено в первой части «Курса физики» при изучении момента импульса и момента силы.

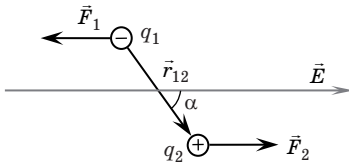


Рис. 6.1. Диполь в однородном поле

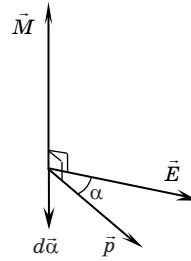


Рис. 6.2. Направления векторов

На электрический диполь во внешнем электрическом поле действует момент сил, стремящийся повернуть диполь вдоль силовой линии¹.

$$\vec{M} = [\vec{p}\vec{E}], \quad (6.1)$$

$$M = pE \sin \alpha.$$

3. Потенциальная энергия электрического диполя во внешнем поле.

Поместим диполь во внешнее электрическое поле и повернем его на угол α по часовой стрелке, как это показано на рис. 6.2. На диполь действует вращательный момент, стремящийся повернуть вектор \vec{p} в направлении вектора \vec{E} , т. е. против часовой стрелки. Следовательно, векторы \vec{M} и $d\vec{\alpha}$ имеют противоположные направления $\vec{M} \uparrow \downarrow d\vec{\alpha}$. Считаем диполь абсолютно твердым телом. Работа по повороту такого тела на малый угол $d\vec{\alpha}$ равна:

$$dA = (\vec{M}d\vec{\alpha}) = Md\alpha \cos \pi = -Md\alpha.$$

$$(\vec{M} \uparrow \downarrow d\vec{\alpha}) \nearrow$$

Вспомним связь работы и потенциальной энергии: $dW = -dA$.

$$dW = Md\alpha = pE \sin \alpha d\alpha = -pEd(\cos \alpha) = -d(pE \cos \alpha) = -d(\vec{p}\vec{E}).$$

Когда дифференциалы двух величин равны, сами величины могут отличаться друг от друга только на константу. Если выбрать ноль потенциальной энергии при $\vec{p} \perp \vec{E}$, то эта константа окажется равной нулю.

¹ Электрический диполь ведет себя так же, как магнитная стрелка в магнитном поле.

Электрический диполь во внешнем однородном электрическом поле имеет потенциальную энергию

$$W = -(\vec{p}\vec{E}). \quad (6.2)$$

Эта энергия минимальна (отрицательна), если диполь ориентирован по силовым линиям. Энергия максимальна (положительна), если диполь ориентирован навстречу силовым линиям. Энергия равна нулю, если диполь ориентирован перпендикулярно силовым линиям.

4. Электрический диполь в неоднородном электрическом поле.

Неоднородное электрическое поле, так же, как и однородное, стремится повернуть диполь вдоль силовой линии. Будем считать, что уже повернуло.

В неоднородном поле вектор напряженности в разных точках имеет различные значения. Пусть напряженность поля увеличивается в направлении силовой линии (вдоль оси ox), и силовые линии сгущаются. Такую картину силовых линий может создать, например, отрицательный заряд, находящийся справа за пределами рис. 6.3.

На заряды q_1 и q_2 действуют силы в противоположных направлениях. Поскольку электрическое поле неоднородное, величины этих разные, их сумма не равна нулю. Имеется равнодействующая сила, направленная вдоль оси ox .

$$F_x = F_2 - F_1 = q(E_2 - E_1).$$

Учтем, что диполь точечный, $\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{E_2 - E_1}{x_2 - x_1}$, и то, что $\ell = x_2 - x_1$.

$$F_x = q(E_2 - E_1) = q \frac{\partial E}{\partial x} \ell = p \frac{\partial E}{\partial x}.$$

На электрический диполь в неоднородном поле, ориентированный в вдоль силовой линии, действует сила, пропорциональная

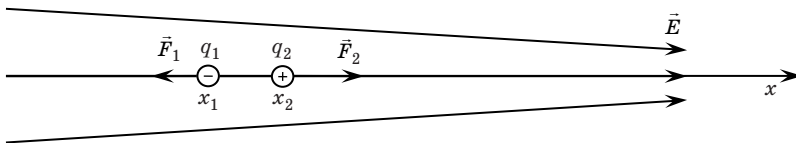


Рис. 6.3. Электрический диполь в неоднородном поле

дипольному моменту и величине неоднородности поля. Эта сила затягивает диполь в область сгущения силовых линий.

$$F_x = p \frac{\partial E}{\partial x}. \quad (6.3)$$

7. Теорема Гаусса для вектора \vec{E}

Сначала введем понятие потока вектора \vec{E} . Рассмотрим небольшую площадку S в однородном электрическом поле (рис. 7.1). Построим единичный вектор \vec{n} из ее середины перпендикулярно поверхности и назовем его нормалью. Эту площадку пересекают силовые линии под некоторым углом к поверхности и углом α к нормали. Поток вектора \vec{E} через площадку S (рис. 7.1) назовем произведение длины вектора на площадь и на косинус угла α .

$$\Phi = E S \cos \alpha = E_n S, \quad (7.1)$$

где E_n – проекция вектора напряженности на направление нормали.

Условимся считать S вектором, длина которого равна площади, направление совпадает с вектором нормали:

$$\vec{S} = S \vec{n}.$$

Теперь формулу (7.1) можно переписать в виде скалярного произведения

$$\Phi = (\vec{E} \vec{S}). \quad (7.2)$$

На рис. 7.2 показаны различные случаи ориентации площадки S во внешнем электрическом поле.

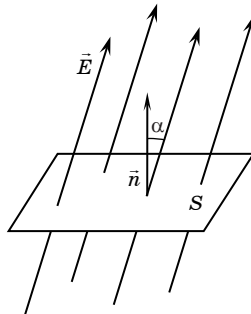


Рис. 7.1. Силовые линии, пересекающие площадку

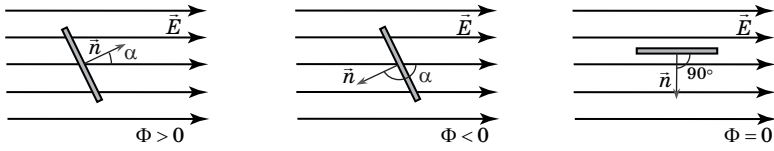


Рис. 7.2. Электрический поток при разных ориентациях площадки во внешнем поле

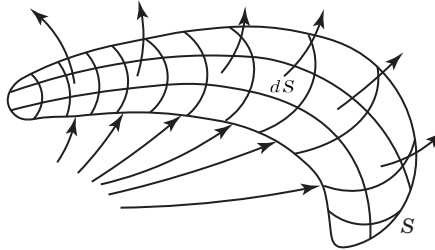


Рис. 7.3. Вычисление потока неоднородного поля через сложную поверхность

В случае, когда поле неоднородно или поверхность неплоская, формулами (7.1) и (7.2) пользоваться невозможно. В таком случае (рис. 7.3) поверхность разбивают на элементарные области $d\vec{S}$. Вычисляют элементарные потоки через каждую такую область, полагая, что в пределах малой области поверхность можно считать плоской, а поле – однородным:

$$d\Phi = (\vec{E}d\vec{S}). \quad (7.3)$$

Полный поток Φ через всю поверхность находится суммированием (интегрированием) всех элементарных потоков

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{E}d\vec{S}). \quad (7.4)$$

В случае замкнутой поверхности введем соответствующий символ на знаке интеграла:

$$\Phi = \oint_{(S)} (\vec{E}d\vec{S}). \quad (7.5)$$

На языке силовых линий поток имеет смысл полного числа силовых линий, пересекающих поверхность.

Формулировка теоремы Гаусса:

поток вектора \vec{E} через замкнутую оболочку равен алгебраической сумме зарядов, оказавшихся внутри этой оболочки, деленной на ϵ_0 .

$$\oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i. \quad (7.6)$$

Докажем теорему в 4 этапа.

1. Оболочка сферическая, один заряд находится в ее центре (рис. 7.4).

В силу полной симметрии картинки:

– вектор \vec{E} всегда перпендикулярен поверхности сферы; $\vec{E} \parallel \vec{n}$, $\vec{E} \parallel d\vec{S}$;

– длина вектора \vec{E} одинакова в любой точке сферы, $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

$$\oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_{(S)} E dS = E \oint_{(S)} dS = ES_{\text{сферы}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Доказано.

2. Оболочка произвольной формы, один заряд находится внутри.

Сначала – сведения из геометрии (стереометрии – рис. 7.5).

Углы φ и θ в радианной мере равны:

$$\varphi = \frac{a}{R}, \quad \theta = \frac{b}{R}.$$

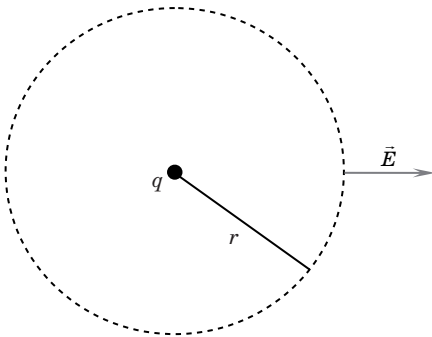


Рис. 7.4. Сферическая оболочка с зарядом в центре

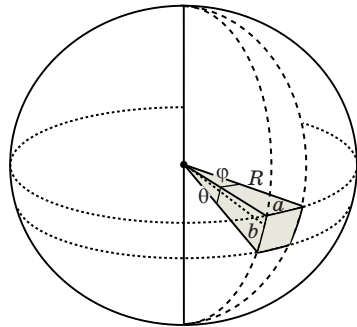


Рис. 7.5. К определению телесного угла

Площадь S небольшого прямоугольника на поверхности сферы с радиусом R

$$S = ab = \varphi \theta R^2 = \Omega R^2.$$

Величина Ω называется *телесным*, или *объемным*, *углом*. В данном случае

$$\Omega = \varphi \theta. \quad (7.7)$$

Телесный угол – это часть пространства, ограниченная некоторой конической поверхностью, которая является объединением всех лучей, выходящих из точки O (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность.

Величина телесного угла определяется формулой

$$\Omega = \frac{S}{R^2}, \quad (7.8)$$

где S – площадь участка на поверхности сферы, стягивающего данный телесный угол; R – радиус этой сферы.

Единицей измерения телесного угла является *стерадиан*. Эту величину можно иначе назвать квадратным радианом: $1 \text{ ср} = (1 \text{ рад})^2$. *Радиан* и *стерадиан* являются безразмерными производными единицами СИ.

Найдем телесный угол, соответствующий всему пространству. Для этого нужно площадь сферы поделить на радиус сферы в квадрате:

$$\Omega_{\text{полн}} = \frac{S_{\text{сф}}}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi(\text{ср}). \quad (7.9)$$

Мы доказали, что *телесный угол всего пространства равен 4π стерадиан*.

Вернемся к теореме Гаусса для точечного заряда внутри произвольной оболочки. Рассмотрим поток $d\Phi$ через элемент поверхности dS , произвольным образом ориентированный к направлению силовых линий (рис. 7.6).

$$d\Phi = (\vec{E} d\vec{S}) = EdS \cos \alpha = EdS_{\perp}.$$

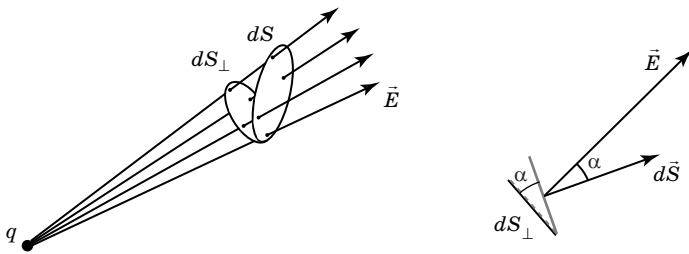


Рис. 7.6. Поток через элемент поверхности

Учтем, что электрическое поле создается точечным зарядом q , а элемент поверхности dS_{\perp} – это элемент поверхности сферы.

$$d\Phi = E dS_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} d\Omega r^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Получается, что поток через элемент поверхности не зависит от расстояния до заряда, но зависит от величины заряда и от телесного угла, который стягивает эта поверхность. Интегрируем по всему пространству и получаем:

$$\Phi = \oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_{(\Omega)} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{(\Omega)} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Утверждение доказано.

3. Рассмотрим оболочку произвольной формы, внутри которой имеются электрические заряды, как это показано на рис. 7.7.

В силу принципа суперпозиции для напряженности электрического поля имеем $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$. Суммирование производится по всем зарядам.

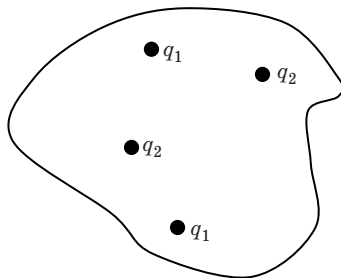


Рис. 7.7. Электрические заряды внутри замкнутой оболочки

Учтем, что знаки интегрирования и суммирования можно менять местами:

$$\Phi = \oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_{(S)} \sum (\vec{E}_i d\vec{S}) = \sum \oint_{(S)} (\vec{E}_i d\vec{S}) = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}.$$

Теорема Гаусса для нескольких зарядов внутри замкнутой оболочки доказана.

4. Пусть положительный заряд находится рядом с замкнутой оболочкой, но за ее пределами, как это показано на рис. 7.8.

В этом случае каждая силовая линия пересекает поверхность S дважды: входит через левую часть – S_1 и выходит через правую часть – S_2 . Граница между ними на рис. 7.8 обозначена. Полный поток через оболочку можно разбить на два: Φ_1 – через левую половину – входящий; Φ_2 – через правую половину – выходящий. Отметим, что силовые линии около границы могут только касаться поверхности S , но не могут ее пересекать. Они дают нулевой вклад в полный поток через оболочку S . Поскольку обе оболочки S_1 и S_2 стягивают один и тот же телесный угол, потоки Φ_1 и Φ_2 равны

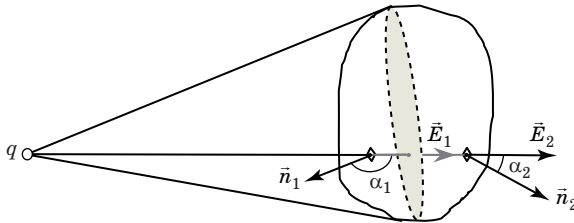


Рис. 7.8. Поток через замкнутый контур

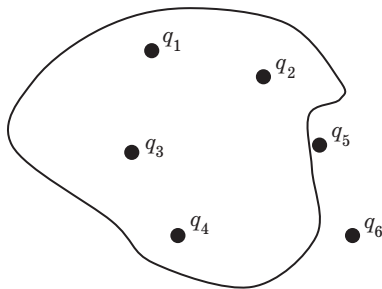


Рис. 7.9. Электрические заряды снаружи и внутри замкнутой оболочки

по модулю; но угол между нормалью и вектором \vec{E} для S_1 тупой, а для S_2 – острый. Значит,

$$\Phi_2 = -\Phi_1, \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0.$$

Мы доказали, что поток через замкнутую поверхность от заряда, расположенного снаружи, равен нулю.

Если электрические заряды расположены снаружи и внутри замкнутой оболочки, то внешние заряды (на рис. 7.9 – это q_5 и q_6) не дают вклада в результирующий поток вектора \vec{E} . Значит, их нужно исключить из суммы.

Суммируются только заряды, находящиеся внутри контура. Таким образом, мы доказали теорему Гаусса для вектора \vec{E} , формула (7.6).

$$\oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i.$$

8. Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей

8.1. Равномерно заряженная сфера

Пусть заряд q равномерно распределен по сфере с радиусом R с центром в точке O . Требуется найти напряженность и потенциал на расстоянии r от центра заряженной сферы.

Очевидно, что поле равномерно заряженной сферы должно быть сферически симметричным. Это значит, что вектор \vec{E} должен быть

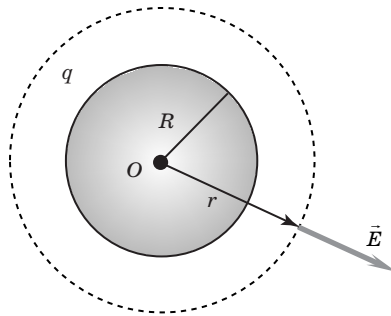


Рис. 8.1. Напряженность электрического поля равномерно заряженной сферы

направлен либо вдоль радиус-вектора \vec{r} , либо навстречу ему. Для определенности будем считать, что заряд q положителен (знак заряда не важен, нужно лишь для определенности выбрать один знак). Окружим сферу концентрической оболочкой с радиусом r . Вектор \vec{E} направлен перпендикулярно поверхности этой сферы, т. е. $\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{S}$, $\Rightarrow (\vec{E}d\vec{S}) = EdS$. Кроме того, длина вектора \vec{E} в любой точке пунктирной сферы одинаковая. Постоянную величину можно вынести из-под интеграла:

$$\oint_{(S)} (\vec{E}d\vec{S}) = \oint_{(S)} EdS = E \oint_{(S)} dS = ES_{\text{сф}} = E4\pi r^2.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса, поток вектора \vec{E} равен полному заряду внутри оболочки, деленному на ϵ_0 :

$$\oint_{(S)} (\vec{E}d\vec{S}) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Левые части равны, значит, равны и правые:

$$E4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}; \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Напряженность электрического поля равномерно заряженной сферы можно вычислить, полагая, что весь заряд сосредоточен в ее центре:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (8.1)$$

Напряженность электрического поля однозначно связана с его потенциалом. Об этом говорилось в п. 4. Если для напряженности электрического поля справедлива формула (2.4), то для потенциала обязательно будет справедлива формула (2.10). Это значит, что

потенциал электрического поля равномерно заряженной сферы можно вычислять, полагая, что весь заряд сосредоточен в ее центре:

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (8.2)$$

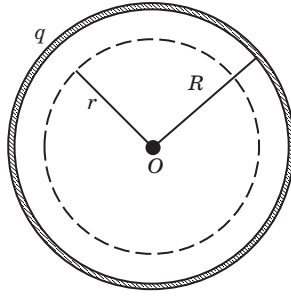


Рис. 8.2. Электрическое поле внутри заряженной сферы

Теперь предположим, что точка наблюдения находится внутри равномерно заряженной сферы (рис. 8.2).

Все приведенные выше рассуждения о симметричности электрического поля верны, но внутри пунктирной области заряда нет, он весь сосредоточен на поверхности сферы с радиусом R . Значит, по теореме Гаусса, для вектора \vec{E}

$$\oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = 0; \quad \Rightarrow \quad E = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi - \text{const.}$$

Потенциал – функция непрерывная, значит, потенциал на поверхности сферы должен совпадать со значением (8.2), взятым при $r = R$. Окончательно имеем для области внутри равномерно заряженной сферы:

$$E = 0, \tag{8.3}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \tag{8.4}$$

Внутри равномерно заряженной сферы напряженность равна нулю, потенциал постоянен и равен потенциалу на поверхности сферы.

Сказанное означает, что внутри равномерно заряженной сферы электрического поля нет.

8.2. Равномерно заряженная нить

Пусть электрический заряд равномерно распределен по бесконечно длинной прямой нити с линейной плотностью λ , как это

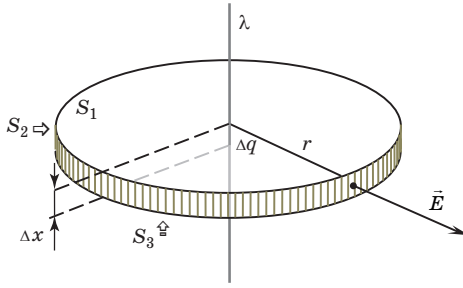


Рис. 8.3. Электрическое поле заряженной нити

показано на рис. 8.3. Любой участок нити длиной Δx имеет электрический заряд Δq :

$$\Delta q = \lambda \Delta x. \quad (8.5)$$

Требуется найти напряженность и потенциал на расстоянии r от этой нити.

Очевидно, что поле равномерно заряженной нити должно быть цилиндрически симметричным.

Во-первых, это значит, что вектор \vec{E} должен быть направлен по радиусу окружности, либо от нити, если она заряжена положительно, либо к нити, если отрицательно. Из сказанного следует, что силовые линии пересекают только боковую поверхность цилиндра на рис. 8.3. Поток через верхнюю и нижнюю грани равен нулю.

Во-вторых, цилиндрическая симметрия поля обозначает, что величина напряженности может зависеть лишь от расстояния r – радиуса окружности.

Выберем небольшой кусочек нити, длиной Δx , несущий заряд (8.5), и окружим его цилиндрической оболочкой с радиусом r и высотой Δx , как это показано на рис. 8.3. Поток вектора \vec{E} через цилиндрическую поверхность равен сумме трех потоков, через поверхности S_1 , S_2 и S_3 ; причем потоки через S_1 и S_3 равны нулю. Остается только поток через боковую поверхность S_2 . Будем считать, что $\lambda > 0$ (на самом деле, знак зарядов не важен, нужно лишь выбрать один, все равно какой, и на этом остановиться). Длина вектора \vec{E} повсюду на боковой поверхности цилиндра одинаковая $E = \text{const}$.

Кроме того,
$$\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{S}, \Rightarrow (\vec{E}d\vec{S}) = E dS.$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_2 = \int_{(S_2)} (\vec{E}d\vec{S}) = \int_{(S_2)} E dS = E \int_{(S_2)} dS = ES_2 = E2\pi r \Delta x.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса, для вектора \vec{E} имеем:

$$\Phi = \frac{\Delta q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \Delta x}{\epsilon_0}.$$

Левые части равны, значит, равны и правые:

$$E 2\pi r \Delta x = \frac{\lambda \Delta x}{\epsilon_0}.$$

Получаем окончательное выражение для напряженности электрического поля бесконечно длинной равномерно заряженной нити:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (8.6)$$

Разность потенциалов в двух точках на расстояниях r_1 и r_2 от нити равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_2 - \ln r_1).$$

Учитывая свойства логарифма, окончательно получаем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (8.7)$$

Если вместо заряженной нити взять бесконечный (очень длинный) равномерно заряженный цилиндр, показанный на рис. 8.4) с линейной плотностью заряда λ , то снаружи от него мы получим такие же выражения, как (8.6) и (8.7). Внутри цилиндра электриче-

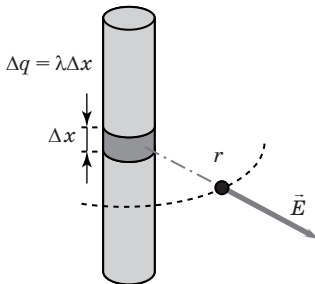


Рис. 8.4. Напряженность электрического поля равномерно заряженного цилиндра



Рис. 8.5. Цилиндрический конденсатор

ского поля нет, т. е. напряженность равна нулю, а потенциал равен потенциалу на его поверхности.

Два соосных заряженных цилиндра образуют *цилиндрический конденсатор*. Пространство между цилиндрическими обкладками обычно заполняется веществом – диэлектриком. Пример такого конденсатора – коаксиальный кабель (рис. 8.5). Обычно центральной обкладкой является проволока, внешней – оплетка. Напряжение между обкладками такого конденсатора может быть найдено по формуле, аналогичной (8.7):

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (8.8)$$

где λ – линейная плотность заряда на *внутренней* обкладке; R_1 и R_2 – радиусы внутренней и внешней обкладок; ϵ – диэлектрическая проницаемость заполняющей среды.

8.3. Равномерно заряженная плоскость

Пусть электрический заряд равномерно распределен по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью σ . Любая площадь ΔS имеет электрический заряд Δq :

$$\Delta q = \sigma \Delta S. \quad (8.9)$$

Требуется найти напряженность и потенциал вблизи заряженной плоскости.

Очевидно, что вектор \vec{E} должен быть направлен перпендикулярно заряженной поверхности. Если плоскость заряжена положительно, то силовые линии *выходят* из нее налево и направо, как это показано на рис. 8.6. Если плоскость заряжена отрицательно,

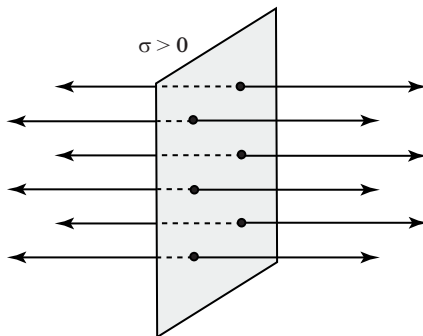


Рис. 8.6. Силовые линии от равномерно заряженной плоскости

то направления всех силовых линий изменятся на противоположные, они будут *входить* в плоскость слева и справа.

Какого-либо отклонения линий от перпендикулярного направления не может быть, поскольку для плоскости есть лишь одно выделенное направление – нормаль. Все отклонения от нормали равны. Если отклонение есть, то оно происходит во всех направлениях сразу, чего не может быть. Значит, вектор \vec{E} перпендикулярен заряженной плоскости.

Выберем небольшой участок плоскости площадью ΔS с зарядом Δq , определяемым формулой (8.9). Окружим этот участок оболочкой в форме параллелепипеда, как показано на рис. 8.7. Поскольку силовые линии параллельны боковым поверхностям, они пересекают лишь торцы выбранной оболочки, но зато пересекают их нормально. Таким образом, поток вектора \vec{E} через всю замкнутую область равен сумме $\Phi_1 + \Phi_2$ через ее торцы ΔS_1 и ΔS_2 .

Будем считать, что $\sigma > 0$ (на самом деле, знак зарядов не важен, нужно лишь выбрать один, все равно какой, и на этом остановиться). Длина вектора \vec{E} повсюду на торцевых поверхностях одинакова: $E_1 = E_2 = E = \text{const}$.

Кроме того, $\vec{E} \uparrow \uparrow \Delta \vec{S}, \Rightarrow (\vec{E} \Delta \vec{S}) = E \Delta S$.

$$\oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \int_{(\Delta S_1)} (\vec{E}_1 d\vec{S}) + \int_{(\Delta S_2)} (\vec{E}_2 d\vec{S}) = E_1 \Delta S_1 + E_2 \Delta S_2 = 2E \Delta S.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса, для вектора \vec{E} имеем:

$$\oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{\Delta q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}.$$

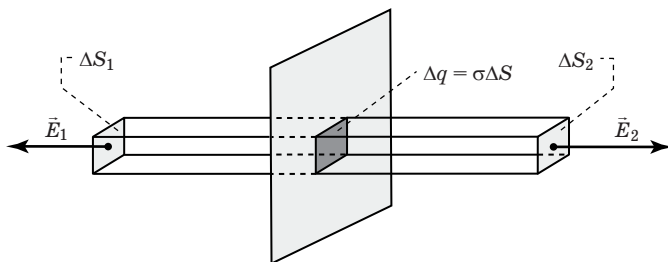


Рис. 8.7. Вычисление потока вектора \vec{E} от заряженной плоскости

Левые части равны, значит, равны и правые:

$$2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}.$$

Сокращаем ΔS и получаем окончательное выражение для напряженности электрического поля бесконечно длинной равномерно заряженной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (8.10)$$

Напряженность электрического поля оказалась одинаковой во всех точках, расположенных по одну сторону от плоскости. Такое поле является *однородным*.

Расположим рядом друг с другом две параллельные плоскости. Каждая из них создает напряженность (8.10). Будем считать, что поверхностные плотности зарядов одинаковые по модулю, а заряды разноименные (рис.8.8). Такая система называется *плоским конденсатором*. Силовые линии выходят в обе стороны из левой – положительной – плоскости. Другие силовые линии входят с обеих сторон в правую – отрицательную – плоскость.

В результате оказывается, что снаружи конденсатора силовые линии от разных обкладок имеют противоположные направления. Они в точности компенсируют друг друга. Электрическое поле снаружи равно нулю. Внутри конденсатора все силовые линии имеют одно и то же направление. Электрические поля усиливают друг друга.

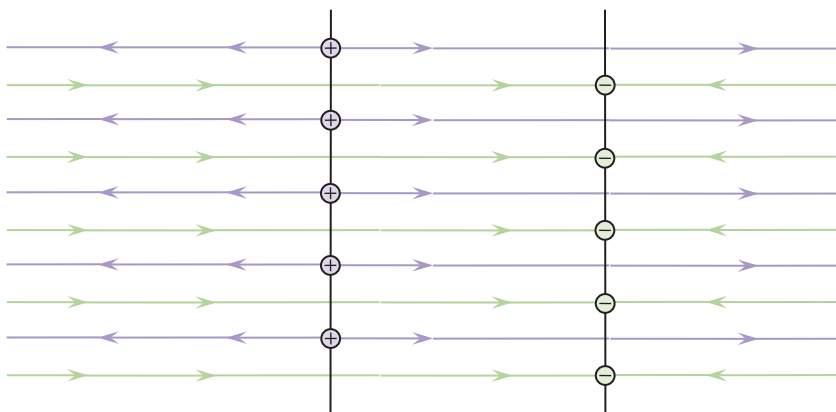


Рис. 8.8. Силовые линии от разноименно заряженных плоскостей

Напряженность оказывается в 2 раза больше, чем от одной плоскости (рис. 8.9).

Получились следующие формулы для напряженности электрического поля:

$$\text{внутри конденсатора} - E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}; \quad (8.11)$$

$$\text{вне конденсатора} - E = 0. \quad (8.12)$$

Ход силовых линий в реальном плоском конденсаторе показан на рис. 8.10. Видно, что электрическое поле неоднородно только на краях конденсатора.

Найдем разность потенциалов для двух точек в однородном электрическом поле. При выводе формулы учтем, что вектор \vec{E} одинаков в любой точке поля как по величине, так и по направлению.

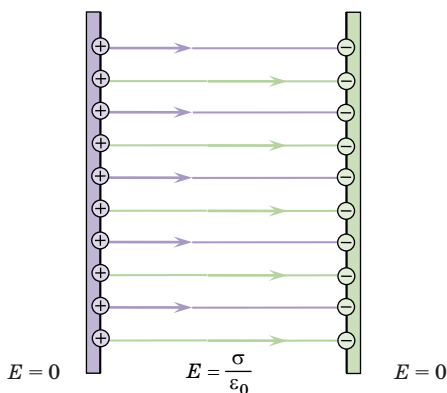


Рис. 8.9. Напряженность электрического поля плоского конденсатора

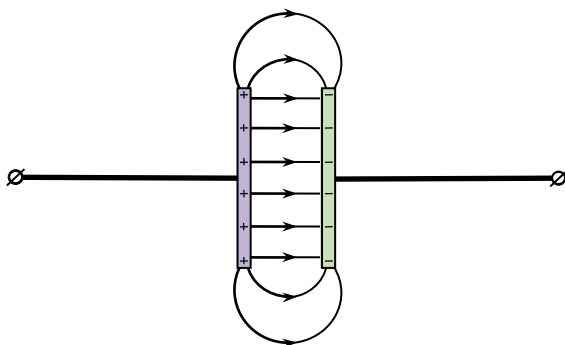


Рис. 8.10. Силовые линии в реальном плоском конденсаторе

Проекцию вектора перемещения \vec{r}_{12} на направление силовых линий обозначим буквой d , как это показано на рис. 8.11.

$$r_{12} \cos \alpha = d.$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{E} d\vec{r}) = \left(\vec{E} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \right) = (\vec{E} \vec{r}_{12}) = E r_{12} \cos \alpha = Ed.$$

Если d – расстояние между обкладками, то разность потенциалов в точках 1 и 2 равна напряжению на конденсаторе:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U.$$

Окончательно имеем:

$$U = Ed, \quad (8.13)$$

или, с учетом (8.11), –

$$U = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}. \quad (8.14)$$

Формула (8.14) получена для плоского воздушного конденсатора, обкладки которого имеют поверхностную плотность заряда $+\sigma$ и $-\sigma$. Реальный конденсатор заполнен веществом – диэлектриком. Формула (8.14) переписется:

$$U = \frac{\sigma d}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (8.15)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды между обкладками.

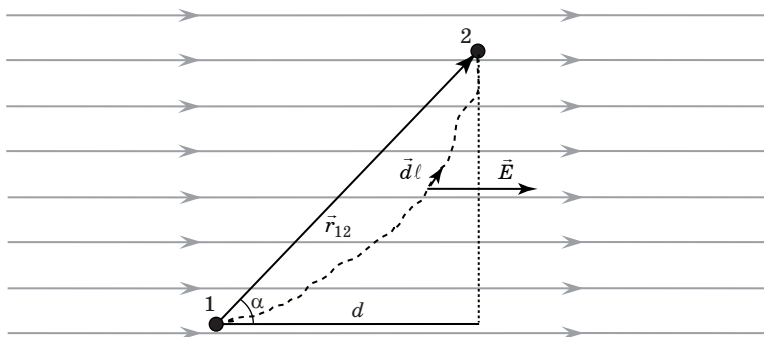


Рис. 8.11. Связь напряженности и потенциала однородного поля

9. Равновесие зарядов на проводниках

Носители зарядов в проводниках приходят в движение под действием сколь угодно малой силы. Поэтому для равновесия зарядов на проводнике необходимо выполнение двух условий:

1) напряженность поля внутри проводника должна быть равна нулю:

$$E = 0; \quad (9.1)$$

2) напряженность поля в любой точке на поверхности проводника должна быть направлена по нормали к поверхности:

$$E = E_n. \quad (9.2)$$

Первое условие означает, что потенциал внутри проводника должен быть постоянным. Из второго условия получается, что поверхность проводника является эквипотенциальной. Если бы эти условия не выполнялись, то свободные заряды внутри проводника и на его поверхности пришли бы в движение. Сейчас мы изучаем условия равновесия электрических зарядов, т. е. исключаем возможность их движения¹.

Сообщенный проводнику избыточный заряд распределяется по поверхности проводника. Это утверждение вытекает из следующих соображений. Избыточный заряд создается носителями одного знака. Они стремятся оттолкнуться друг от друга как можно дальше. Дальше поверхности – не получится, поэтому они соберутся именно на поверхности².

В случае полого проводника избыточный заряд распределяется только по внешней поверхности³. На внутренних полостях зарядов быть не может. Предполагается, что внутри проводника нет изолированных заряженных тел.

Получим выражение для напряженности электрического поля вблизи поверхности проводника. Для этого рассмотрим элемент ΔS поверхности заряженного проводника (рис. 9.1). Если поверхность

¹ При изменении внешних условий формулы (9.1), (9.2) нарушатся, и заряды придут в движение. Однако в своем движении заряды будут стремиться к состоянию равновесия, где (9.1), (9.2) снова будут выполняться.

² Если какой-то нескомпенсированный заряд оказался бы внутри проводника, то на нем обязательно начинались бы или заканчивались силовые линии. Значит, внутри проводника возникло бы электрическое поле, что противоречило бы (9.1).

³ Отсутствие зарядов внутри проводника подтверждает закон Кулона. Этот факт свидетельствует о том, что показатель степени при r в точности равен 2.

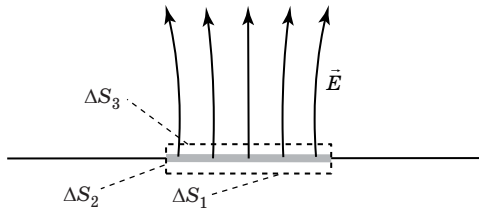


Рис. 9.1. Силовые линии на поверхности металла

ная плотность заряда в данном месте равна σ , то на элементе ΔS сосредоточен заряд $\Delta q = \sigma \Delta S$ (рисунок выполнен для $\sigma > 0$). На этом заряде начинаются силовые линии, которые, в силу условия (9.2), в непосредственной близости направлены по нормали к элементу ΔS . Окружим этот элемент замкнутой оболочкой, которая расположена очень близко к поверхности с внутренней и с наружной сторон. Полный поток через замкнутую оболочку можно разбить на три потока: через внутреннюю поверхность – поток Φ_1 , через боковую поверхность – поток Φ_2 и через внешнюю поверхность – поток Φ_3 :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3.$$

Поток Φ_1 равен нулю в силу условия (9.1). Поток Φ_2 можно сделать сколь угодно малым, уменьшая площадь боковой грани. Остается только поток Φ_3 . Считая площадь ΔS малой, т. е. поле в ее пределах однородным, находим:

$$\Phi = \Phi_3 = E \Delta S_3.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса,

$$\Phi = \frac{\Delta q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}.$$

Учитывая, что $\Delta S_3 = \Delta S$, окончательно получаем:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (9.3)$$

Получилось значение, вдвое бóльшее, чем (8.10) для бесконечной равномерно заряженной плоскости. Причина в том, что равномерно заряженная плоскость создает электрическое поле с обеих сторон, а заряженная поверхность проводника – только с одной стороны.

Рассмотрим поле, созданное проводником, изображенным на рис. 9.2, а. Вблизи поверхности проводника эквипотенциали почти повторяют его форму. Чем дальше от проводника, тем поверхности

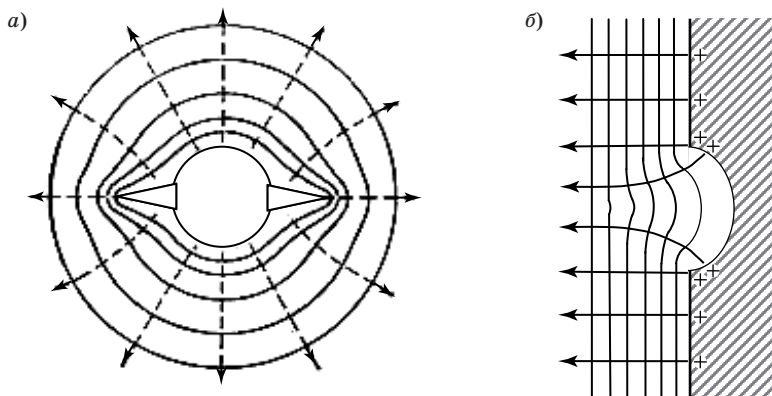


Рис. 9.2. Эквипотенциальные поверхности (сплошные линии) и линии напряженности поля (пунктирные линии) вблизи поверхности проводника (а) и вблизи впадины (б)

больше сглаживаются, и на больших расстояниях эквипотенциальные поверхности становятся сферическими, как от точечного заряда.

Вблизи выступов эквипотенциальные поверхности располагаются ближе друг к другу, значит, напряженность здесь больше, и плотность заряда здесь максимальна¹. Особенно велика плотность заряда бывает вблизи острия. Искра проскакивает в области с максимальной напряженностью поля. По этой причине пробой в конденсаторе обычно бывает на заусенце, а молния обычно бьет в выступающие предметы и почти никогда – в ямы.

Вблизи углублений в проводнике эквипотенциальные поверхности располагаются реже (рис. 9.2, б), напряженность поля – меньше. Спасаться от молнии нужно в ложбинах.

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле (рис. 9.3) носители заряда приходят в движение. Заряды располагаются на поверхности проводника и принимают такую конфигурацию, которая полностью скомпенсирует электрическое поле внутри проводника. Заряды на поверхности проводника замыкают на себя часть силовых линий. Силовые линии внешнего поля оказываются разорванными. Они оканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и начинаются на положительных.

¹ К такому же выводу можно прийти, полагая, что вследствие взаимного отталкивания заряды стремятся расположиться как можно дальше друг от друга.

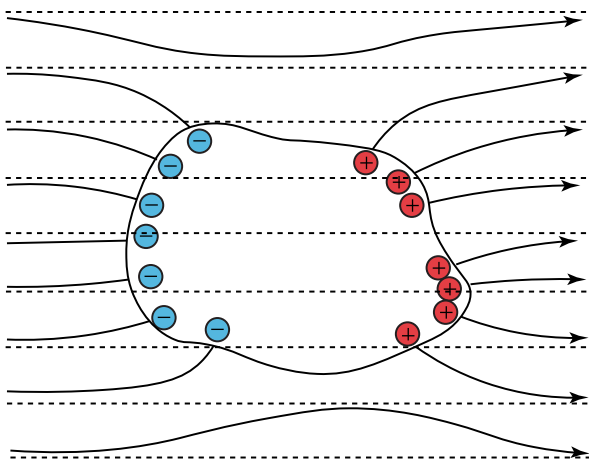


Рис. 9.3. Линии напряженности поля, в которое внесен незаряженный проводник

Индукцированные заряды располагаются на внешней поверхности проводника. Если внутри проводника имеется полость, то при равновесном распределении индуцированных зарядов поля в ней нет. Если какой-то прибор нужно защитить от воздействия внешних электрических полей, его окружают проводящим экраном.

10. Диэлектрики

В диэлектриках нет *свободных* зарядов. Все электрические заряды связаны с нейтральными молекулами. Эти заряды называются *связанными*. Нейтральные молекулы могут быть *дипольными* или *бездипольными*.

Дипольная молекула имеет *постоянный дипольный момент*, т. е. часть молекулы заряжена положительно, а часть – отрицательно. Примеры таких молекул приведены на рис. 10.1.

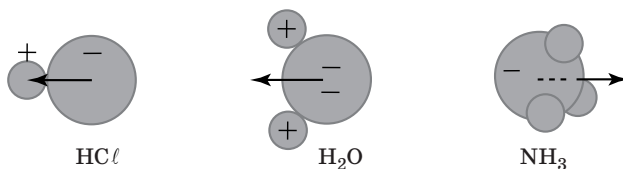


Рис. 10.1. Дипольные молекулы

Бездипольная молекула не имеет постоянного дипольного момента, но во внешнем электрическом поле она *поляризуется*, т. е. приобретает *индуцированный (наведенный)* дипольный момент. Если внешнее поле убрать, то молекула снова становится бездипольной. Бездипольными могут быть только молекулы, имеющие центр симметрии. Примеры таких молекул показаны на рис. 10.2.

Дипольная молекула, в соответствии с п. 6, поворачивается во внешнем электрическом поле вдоль силовых линий. Бездипольная молекула приобретает во внешнем поле дипольный момент, направленный вдоль силовых линий. Таким образом, во внешнем электрическом поле молекулы любого диэлектрика имеют дипольный момент, направленный вдоль силовых линий. Это обозначает, что диэлектрик во внешнем поле оказывается *поляризованным*.

Существуют два типа поляризации: *ориентационная* – для дипольных молекул – и *наведенная (индуцированная)* – для бездипольных. В дальнейшем будем, в первую очередь, иметь в виду ориентационную поляризацию.

Рассмотрим дипольную молекулу в плоском конденсаторе. Она стремится повернуться и, в конце концов, поворачивается вдоль силовых линий (рис. 10.3). То же самое происходит с остальными молекулами (рис. 10.4).

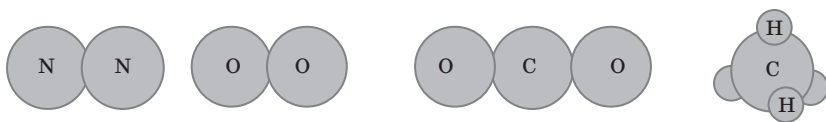


Рис. 10.2. Бездипольные молекулы N_2 , O_2 , CO_2 , CH_4

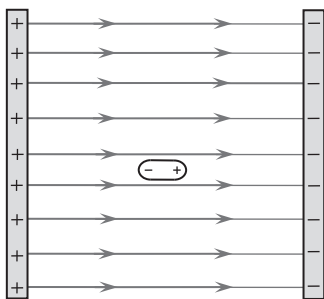


Рис. 10.3. Дипольная молекула в плоском конденсаторе

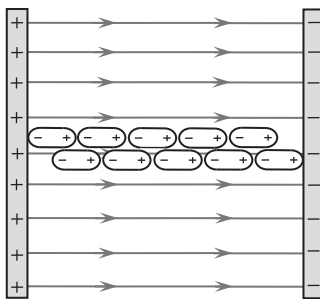


Рис. 10.4. Молекулы диэлектрика в электрическом поле

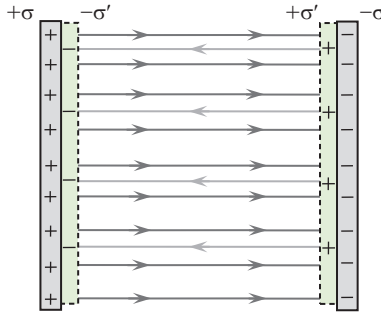


Рис. 10.5. Поляризационные заряды в диэлектрике

Ориентированные по направлению силовых линий молекулы заполняют пространство между обкладками конденсатора таким образом, что объем диэлектрика оказывается нейтральным, а тонкий приграничный слой толщиной в «полмолекулы» – заряженным (рис. 10.5).

Между обкладками конденсатора оказывается вложенным еще один конденсатор. Заряды на обкладках этого конденсатора другой полярности и меньше по величине. Эти заряды создают силовые линии, направленные в противоположную сторону; число этих линий меньше, поэтому электрическое поле в конденсаторе оказывается не полностью скомпенсированным, как в металлах, а лишь ослабленным.

Ситуация, показанная на рис. 10.4, когда все молекулы повернуты вдоль силовых линий, в действительности невозможна. Тепловое движение стремится дезориентировать молекулы. Внешнее электрическое поле – ориентировать. В результате лишь часть молекул оказываются повернутыми вдоль направления вектора \vec{E} , остальные ориентированы хаотично. С увеличением напряженности внешнего поля доля ориентированных молекул растет.

Электрическое поле в диэлектрике \vec{E} складывается из внешнего поля \vec{E}_0 и добавки \vec{E}' , созданной диэлектриком (поляризационными зарядами):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (10.1)$$

Учитывая направления векторов $\vec{E}_0 \uparrow \vec{E}'$, имеем в скалярном виде:

$$E = E_0 - E'. \quad (10.2)$$

Величина E' находится по формуле (8.11):

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}, \quad (10.3)$$

где σ' – поверхностная плотность поляризационных зарядов на внутренних сторонах обкладок.

Диэлектрик во внешнем поле оказывается поляризованным. Введем количественную характеристику этого явления – *поляризованность*, равную сумме всех дипольных моментов единицы объема вещества:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{P}_i}{\Delta V}. \quad (10.4)$$

Выберем узкий столбик диэлектрика от одной обкладки до другой вдоль силовой линии, как это показано на рис. 10.6. Длина этого столбика – d , площадь поперечного сечения – ΔS . На его левой и правой гранях имеются поляризационные заряды $\pm\sigma'\Delta S$. Дипольный момент такого столбика равен:

$$\vec{P} = \sigma'\Delta S\vec{d}.$$

Полученный дипольный момент должен быть равен сумме дипольных моментов всех молекул выбранного объема. Таким образом, для абсолютной величины вектора поляризованности получаем:

$$P = \frac{\sigma'\Delta Sd}{\Delta V} = \sigma'. \quad (10.5)$$

Принимая во внимание (10.3), имеем:

$$P = \varepsilon_0 E'.$$

Поставляем это выражение в (10.2):

$$\varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_0 E'; \Rightarrow \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 E'; \Rightarrow \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E + P. \quad (10.6)$$

Поляризованность вещества должна зависеть от напряженности поля, в котором оно находится:

$$P \sim E, \text{ или } P = \chi\varepsilon_0 E,$$

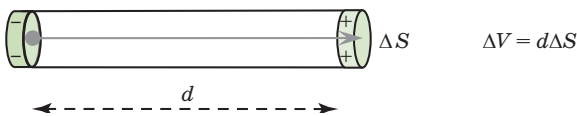


Рис. 10.6. Дипольный момент элемента объема

где χ – диэлектрическая восприимчивость вещества.

$$\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E + \chi \varepsilon_0 E = (1 + \chi) \varepsilon_0 E. \quad (10.7)$$

Величина $D = \varepsilon_0 E_0$ называется *электрической индукцией*. Она характеризует электрическое поле, каким оно было бы, если из пространства убрать диэлектрик. Величину в скобках называют *диэлектрической проницаемостью* среды:

$$\varepsilon = 1 + \chi. \quad (10.8)$$

В рассматриваемом случае, когда силовые линии однородного электрического поля перпендикулярны поверхности диэлектрика, эта величина показывает, во сколько раз диэлектрик ослабляет электрическое поле.

Получаем связь электрической индукции с напряженностью электрического поля:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (10.9)$$

Полученное соотношение справедливо для любого диэлектрика в электрическом поле любой конфигурации.

Подведем итоги.

1. В диэлектрике, помещенном в электрическое поле, возникают особые *связанные* заряды. Движения зарядов по веществу не происходит, все перемещения имеют место лишь в пределах отдельно взятой молекулы. В электрическом поле часть молекулы, заряженная положительно, немного перемещается по направлению силовой линии, а часть молекулы, заряженная отрицательно, – против. При этом молекула в целом либо поворачивается, либо поляризуется. Эти микроскопические перемещения создают поляризацию диэлектрика. Возникающие заряды иначе называются *поляризационными*. При этом вещество в целом остается нейтральным.

2. Поляризационные заряды возникают только на неоднородностях поля:

- в однородном поле – только на границе;
- в неоднородном поле – на границе и в объеме.

3. Поляризационные заряды создают внутри диэлектрика дополнительное поле, которое всегда направлено навстречу внешнему или, по крайней мере, имеет таковую компоненту.

4. Вводится понятие вектора электрической индукции \vec{D} , который характеризует электрическое поле, каким оно было бы, если бы из пространства получилось удалить диэлектрик и все созданные им поляризационные заряды.

11. Теорема Гаусса для вектора \vec{D}

Выше был введен вектор электрической индукции, характеризующий электрическое поле в диэлектрике. Точечный заряд создает вокруг себя центральное поле с индукцией

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{r}. \quad (11.1)$$

Электрическая индукция измеряется в Кл/м². Вид этой формулы не зависит от диэлектрической проницаемости окружающей среды. Вектор электрической индукции создается только истинными свободными зарядами, к поляризационным зарядам в диэлектрике он не чувствителен.

Запишем теорему Гаусса для вектора \vec{E} , для замкнутого контура, охватывающего диэлектрик. Внутри этой области имеются как свободные, так и поляризационные заряды. И те, и другие создают электрическое поле:

$$\oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i.$$

Напряженность электрического поля под знаком интеграла равна сумме напряженностей внешнего поля и поля, созданного диэлектриком. Сумма, стоящая справа, включает в себя все заряды – и свободные, и связанные.

$$\oint_{(S)} (\vec{E}_0 + \vec{E}') d\vec{S} = \oint_{(S)} (\vec{E}_0 d\vec{S}) + \oint_{(S)} (\vec{E}' d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i^{\text{своб}} + \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i^{\text{связ}}.$$

Электрическое поле с напряженностью \vec{E}' создают только связанные заряды:

$$\oint_{(S)} (\vec{E}' d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i^{\text{связ}}.$$

Значит, поле с напряженностью \vec{E}_0 создается только свободными зарядами:

$$\oint_{(S)} (\vec{E}_0 d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i^{\text{своб}}.$$

Домножаем левую и правую части на ϵ_0 и, учитывая, что $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0$, получаем теорему Гаусса для вектора \vec{D} :

$$\oint_{(S)} (\vec{D} d\vec{S}) = \sum q_i^{\text{своб}}. \quad (11.2)$$

Поляризационные заряды связаны с отдельными молекулами. Вычислить поляризационный заряд диэлектрика в целом очень сложно. От всех этих проблем можно уйти, рассматривая вектор \vec{D} , который от поляризационных зарядов вообще не зависит. При формулировке теоремы Гаусса символ «своб» над зарядами обычно не указывают.

Для вектора \vec{D} , так же, как и для вектора \vec{E} , вводят линии поля. Их называют линиями индукции. Эти линии начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах. Поэтому они входят в диэлектрик, не прерываясь на границе.

Линии напряженности могут начинаться и заканчиваться на любом заряде, как на свободном, так и на связанном. Поэтому на границе «вакуум – диэлектрик» обязательно прерывается часть силовых линий.

В заключение отметим, что сила, действующая на электрический заряд, определяется не вектором \vec{D} , а вектором \vec{E} . Поэтому вектор \vec{D} является все-таки вспомогательным, хотя и очень удобным, вектором.

12. Граничные условия для векторов \vec{D} и \vec{E}

Имеются два диэлектрика с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Силовые линии пересекают границу диэлектриков под некоторым углом. В нашем распоряжении две теоремы:

- 1) Гаусса для вектора \vec{D} ;
- 2) о циркуляции вектора \vec{E} .

На рис. 12.1 показано сечение двух граничащих диэлектриков для случая $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Рассмотрим замкнутую поверхность, охватывающую площадку ΔS , на границе диэлектриков. Выберем эту поверхность состоящей из трех частей – левой, правой и боковой. Будем считать, что левая ΔS_1 и правая ΔS_2 поверхности расположены очень близко к границе. Площадью боковой поверхности в таком случае можно будет пренебречь.

Считаем элемент границы ΔS настолько малым, что электрическое поле по обе стороны от него можно считать однородным. Поток и через левую ΔS_1 , и правую ΔS_2 границы в таком случае находится по формулам:

$$\Phi_{D1} = \int_{\Delta S_1} (\vec{D}_1 d\vec{S}_1) = (\vec{D}_1 \Delta \vec{S}_1) = -D_1 \Delta S \cos \alpha_1 = -D_{1n} \Delta S;$$

$$\Phi_{D2} = \int_{\Delta S_2} (\vec{D}_2 d\vec{S}_2) = (\vec{D}_2 \Delta \vec{S}_2) = D_2 \Delta S \cos \alpha_2 = D_{2n} \Delta S.$$

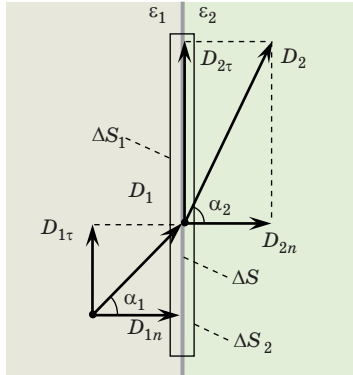


Рис. 12.1. Поток вектора \vec{D} через границу диэлектриков

Поток через боковую поверхность стремится к нулю: $\Phi_{D_{\text{бок}}} = 0$.

Первый поток оказался отрицательным из-за того, что нормаль к поверхности ΔS_1 направлена наружу, т. е. справа налево.

Полный поток через всю замкнутую поверхность равен сумме трех написанных потоков, а, по теореме Гаусса, для вектора \vec{D} он равен нулю, поскольку диэлектрик не заряжен. Таким образом, имеем:

$$0 = \Phi_{D_1} + \Phi_{D_2} = -D_{1n}\Delta S + D_{2n}\Delta S = (D_{2n} - D_{1n})\Delta S;$$

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (12.1)$$

Нормальная составляющая вектора электрической индукции сохраняется при пересечении границы диэлектриков.

Учтем связь (10.9) векторов индукции и напряженности электрического поля и перепишем условие (12.1) для вектора \vec{E} :

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}. \quad (12.2)$$

На рис. 12.2 показано сечение двух граничащих диэлектриков для случая $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Рассмотрим замкнутый контур, охватывающий участок границы длиной Δl . Направление обхода показано на рис. 12.2 стрелкой. Этот контур состоит из трех частей – левой, правой и боковой. Будем считать, что левый Δl_1 и правый Δl_2 участки контура расположены очень близко к границе. Поэтому длиной боковой части можно пренебречь.

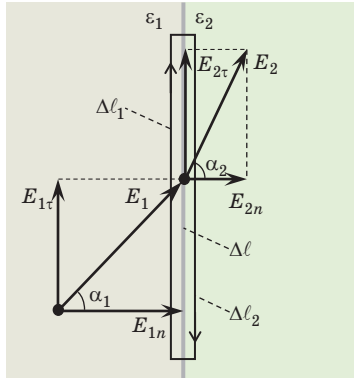


Рис. 12.2. Циркуляция вектора \vec{E} на границе диэлектриков

Считаем элемент границы $\Delta\ell$ настолько малым, что электрическое поле по обе стороны от него можно считать однородным. Найдем циркуляцию вектора \vec{E} на показанном контуре:

$$\oint (\vec{E}d\vec{\ell}) = \int_{(\ell_1)} (\vec{E}_1 d\vec{\ell}) + \int_{(\ell_2)} (\vec{E}_2 d\vec{\ell}) + \int_{(\ell_{\text{бок}})} (\vec{E} d\vec{\ell}) = \dots$$

Третий интеграл равен нулю, поскольку область интегрирования стремится к нулю.

$$\dots = (\vec{E}_1 \Delta\vec{\ell}_1) + (\vec{E}_2 \Delta\vec{\ell}_2) = E_1 \sin\alpha_1 \Delta\ell - E_2 \sin\alpha_2 \Delta\ell = \dots$$

Знак «минус» связан с тем, что угол между направлениями \vec{E}_2 и $\Delta\vec{\ell}_2$ больше 90° .

$$\dots = E_{1\tau} \Delta\ell - E_{2\tau} \Delta\ell = (E_{1\tau} - E_{2\tau}) \Delta\ell = 0.$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (12.3)$$

Тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля сохраняется при пересечении границы диэлектриков.

Учтем связь (10.9) векторов индукции и напряженности электрического поля и перепишем условие (12.3) для вектора \vec{D} :

$$\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}. \quad (12.4)$$

13. Преломление силовых линий и линий индукции на границе раздела диэлектриков

На границе раздела диэлектриков для вектора индукции обязательно должны выполняться следующие условия:

– для нормальной компоненты: $D_{1n} = D_{2n}$; (12.1)

– для тангенциальной компоненты: $\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}$. (12.4)

Видно, что нормальная и тангенциальная компоненты вектора \vec{D} ведут себя на границе по-разному. Это значит, что вектор индукции меняет свое направление на границе, т. е. линии индукции преломляются. Из рис. 12.1 понятно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}}$. Найдем закон преломления линий индукции:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\left(\frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} \right)}{\left(\frac{D_{2\tau}}{D_{2n}} \right)} = \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \text{ И так, } \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (13.1)$$

Полученная формула задает закон преломления линий индукции на границе.

Поскольку векторы \vec{D} и \vec{E} всегда параллельны друг другу, точно такое же правило справедливо и для силовых линий электрического поля, однако ход тех и других линий в диэлектрике разный. Различие в том, что линии индукции непрерывны, тогда как часть силовых линий прерывается на границе раздела. На рис. 13.1 показаны линии индукции и линии напряженности электрического поля, проходящие через диэлектрическую пластину.

Поскольку электрическое поле в веществе ослабляется, густота линий напряженности в пластинке меньше, чем снаружи. Линии индукции вследствие преломления сгущаются, что указывает на увеличение индукции электрического поля в пластине.

Отметим, что на границе раздела диэлектриков возникают поляризационные заряды. Поясним это. Вспомнив формулу (10.5), перепишем (10.6):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}; \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\varepsilon_0}; \quad \Rightarrow \quad E_n = \frac{D_n - P_n}{\varepsilon_0}.$$

$$E_{2n} - E_{1n} = (D_{2n} - D_{1n} - P_{2n} + P_{1n}) \frac{1}{\varepsilon_0} = (P_{1n} - P_{2n}) \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{\varepsilon_0}.$$

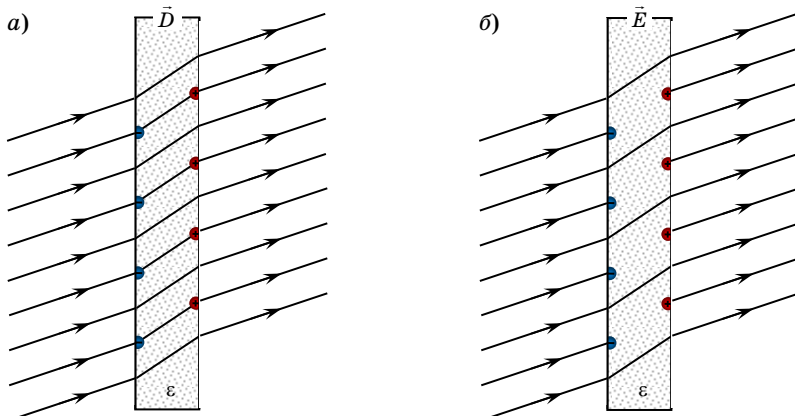


Рис. 13.1. Линии индукции (а) и силовые линии (б) в пластине диэлектрика

Получается, что если имеется скачок напряженности электрического поля на некоторой границе (а он обязательно имеется), то эта граница оказывается заряженной с поверхностной плотностью:

$$\Delta\sigma' = -\Delta E_n \varepsilon_0. \quad (13.2)$$

14. Электроемкость

14.1. Электроемкость уединенного проводника

Если некоторому уединенному проводнику сообщить заряд q , то он распределится по поверхности проводника так, чтобы выполнялись условия (9.1) и (9.2). Поверхность проводника при этом будет эквипотенциальной. Если сообщить проводнику еще такую же порцию заряда q , то она распределится по поверхности точно так же, как и первая. Любая последующая порция заряда распределится по поверхности подобно предыдущим, иначе условия (9.1) и (9.2) будут нарушены.

Из сказанного вытекает, что различные по величине заряды распределяются по поверхности уединенного проводника подобным образом: отношение плотностей заряда в двух произвольно взятых точках поверхности при любой величине заряда будет одним и тем же. Отсюда следует, что потенциал уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду:

$$q = C\varphi. \quad (14.1)$$

Коэффициент пропорциональности C называется *электроемкостью*, или просто *емкостью* уединенного проводника. Согласно этой формуле, электроемкость проводника равна

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (14.2)$$

В Международной системе единиц СИ электроемкость измеряется в *фарадах*:

$$1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В}.$$

Найдем электроемкость шара радиуса R . Согласно формуле (8.4), потенциал заряженной сферы равен:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Если шар окружен диэлектриком, то в знаменателе формулы появится ϵ :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}. \quad (14.3)$$

Электроемкость шара – это коэффициент пропорциональности между q и φ .

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (14.4)$$

Мы видим, что электроемкость шара зависит лишь от его радиуса и от диэлектрической проницаемости окружающей среды. Электроемкость не зависит от потенциала шара и от заряда на нем.

Электроемкость 1 Ф имел бы шар, радиусом $\sim 9 \cdot 10^9 \text{ м}$, что в 1400 раз больше радиуса Земли и в 13 раз больше радиуса Солнца.

14.2. Электроемкость конденсатора

Если рядом с заряженным проводником оказывается другой проводник, на котором индуцируется заряд противоположного знака, то такое устройство называется конденсатором. В таком случае нужно говорить не о потенциале каждого заряда относительно бесконечности, а о потенциале обкладок друг относительно друга, т. е. о разности потенциалов или о напряжении:

$$C = \frac{q}{U}, \quad (14.5)$$

где q – модуль заряда на обкладках конденсатора. Емкость конденсатора измеряется в тех же единицах, что и емкость уединенного проводника.

Плоский конденсатор представляет собой две близкорасположенные плоские обкладки, на которые подаются заряды противоположных знаков. Площадь обкладок S , расстоянием между ними d . Вспомним формулу (8.15), полученную в следствиях из теоремы Гаусса:

$$U = \frac{\sigma d}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (14.6)$$

где U – напряжение между обкладками; ε – диэлектрическая проницаемость среды; σ – поверхностная плотность зарядов на обкладках, равная

$$\sigma = q/S.$$

Подставляем в (14.6) и получаем: $U = \frac{qd}{\varepsilon \varepsilon_0 S}$.

Находим емкость плоского конденсатора как коэффициент пропорциональности между q и U :

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}. \quad (14.7)$$

Мы видим, что емкость плоского конденсатора зависит лишь от его размеров и от диэлектрической проницаемости среды между обкладками. Емкость не зависит от напряжения на обкладках и от заряда на них.

Цилиндрический конденсатор представляет собой два соосных цилиндра, на которые подаются заряды противоположных знаков. Таким конденсатором является коаксиальный антенный кабель, имеющий центральную жилу радиусом R_1 и оплетку радиусом R_2 . Длина конденсатора ℓ , диэлектрическая проницаемость среды ε . Вспомним формулу (8.8), полученную в следствиях из теоремы Гаусса:

$$U = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (14.8)$$

где λ – линейная плотность электрических зарядов, т. е. заряд, проходящийся на единицу длины обкладки –

$$\lambda = \frac{q}{\ell}, \quad (14.9)$$

где q – величина заряда на обкладках; ℓ – длина конденсатора (кабеля). Подставляем (14.9) в (14.8) и получаем:

$$U = \frac{q}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0 \ell} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Находим емкость цилиндрического конденсатора как коэффициент пропорциональности между q и U :

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0\ell}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (14.10)$$

Мы видим, что емкость цилиндрического конденсатора зависит лишь от его размеров и от диэлектрической проницаемости заполняющей среды. Емкость не зависит от напряжения на обкладках и от заряда на них.

15. Соединение конденсаторов в батареи

Электрический конденсатор – необходимый элемент большинства электрических схем. Он обозначается специальным графическим символом и подписывается буквой C^1 (рис. 15.1).

Для увеличения емкости конденсаторы соединяют в параллельные цепочки. На рис. 15.2 показаны три конденсатора, включенные в такую цепочку. Наша цель – заменить цепочку C_1, C_2, C_3 одним эквивалентным конденсатором C и связать его заряд, напряжение и емкость с соответствующими величинами для каждого конденсатора этой цепочки.

Положительные электрические заряды выходят из клеммы \oplus и попадают на обкладки трех конденсаторов. Точно такие же по величине отрицательные заряды притекают на противоположную обкладку с клеммы \ominus . Сколько зарядов вышло с клемм, столько их оказалось в итоге на обкладках. Из закона сохранения электрического заряда следует первое правило:

$$q_1 + q_2 + q_3 = q. \quad (15.1)$$

Для того, чтобы измерить напряжение на конденсаторах C_1, C_2, C_3 и на всей цепочке в целом (т. е. на эквивалентном конденсаторе C), нужно подключить вольтметр, соответственно, к точкам A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 и к AB , как это показано на рис. 15.3. Для вольтметра все это одни и те же точки подключения. Все они эквивалентны. Все четыре вольтметра покажут одно и то же напряжение. Напряжения на всех конденсаторах цепочки, на цепочке в целом и на эквивалентном конденсаторе одинаковые. Имеем второе правило:

$$U_1 = U_2 = U_3 = U. \quad (15.2)$$

¹ Одной и той же буквой C обозначается и сам конденсатор, как элемент схемы, и его главное свойство – емкость.



Рис. 15.1. Обозначение конденсатора в электрических схемах: а – обозначение конденсатора; б – конденсатор с клеммами; в – конденсатор включен в схему через клеммы

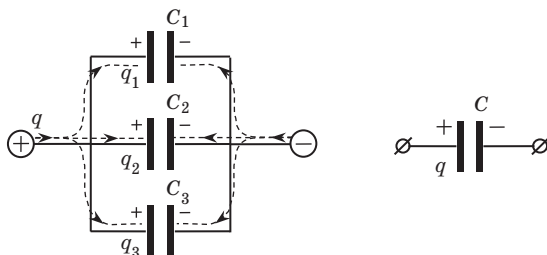


Рис. 15.2. Заряды на параллельной цепочке конденсаторов

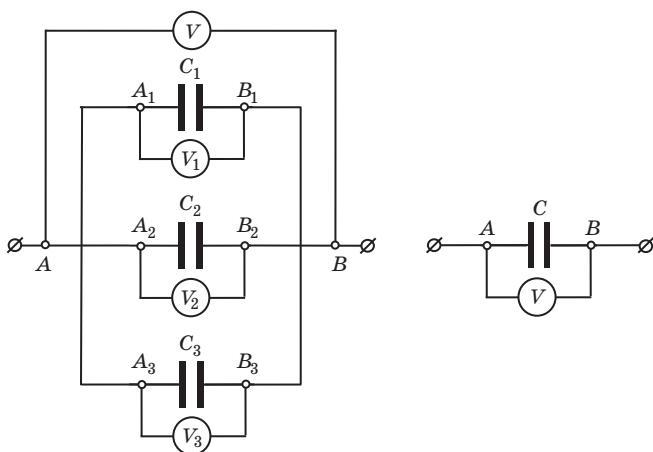


Рис. 15.3. Напряжения на параллельной цепочке конденсаторов

То, что конденсаторы C_1 , C_2 , C_3 имеют различные емкости, ничего не меняет. От числа конденсаторов в цепочке тоже качественно ничего не зависит.

Возьмем выражение (15.1) и поделим левую и правую части на одно и то же число – на U . От этого равенство не изменится:

$$\frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U} + \frac{q_3}{U} = \frac{q}{U}.$$

В силу правила (15.2) мы можем заменить U на любое из U_1, U_2, U_3 . Заменяем

$$\frac{q_1}{U_1} + \frac{q_2}{U_2} + \frac{q_3}{U_3} = \frac{q}{U}$$

и получаем правило сложения электрических емкостей в параллельной цепочке:

$$C_1 + C_2 + C_3 = C. \quad (15.3)$$

Кроме электроемкости конденсатора, очень важно предельно допустимое напряжение U_m . Для его увеличения конденсаторы соединяют в последовательную цепочку. На рис. 15.4 показаны три конденсатора, включенные в такую цепочку. Наша цель – заменить цепочку C_1, C_2, C_3 одним эквивалентным конденсатором C и связать его заряд, напряжение и электроемкость с соответствующими величинами для каждого конденсатора этой цепочки.

Положительные электрические заряды выходят из клеммы \oplus и попадают на левую обкладку конденсатора C_1 . На правую обкладку этого конденсатора притягиваются отрицательные заряды такой же величины с конденсатора C_2 . Соответственно, на левой обкладке C_2 остаются положительные заряды, такие же по величине, что и на C_1 . Положительные заряды с левой обкладки C_2 притягивают к себе с конденсатора C_3 такие же по величине отрицательные заряды. Соответственно, на левой обкладке C_3 остаются положительные заряды, такие же по величине, как на C_1 и на C_2 . Эти заряды, в свою очередь, притягивают с клеммы \ominus отрицательные заряды, такие же, как на C_1 и на C_2 . Таким образом, на всех конденсаторах параллельной цепочки оказался одинаковый заряд. Именно этот заряд оказывается на эквивалентном конденсаторе C . То, что конденсаторы в цепочке имеют разные емкости, ничего не меняет. Точно такой же результат получится, если число конденсаторов не три, а другое. Итак, имеем четвертое правило:

$$q_1 = q_2 = q_3 = q. \quad (15.4)$$

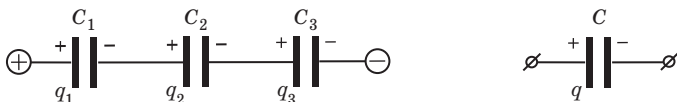


Рис. 15.4. Заряды на последовательной цепочке конденсаторов

Измерим напряжения на каждом конденсаторе U_1, U_2, U_3 и U на цепочке в целом. Для этого подключим вольтметры, как это показано на рис. 15.5.

Вспомним, что напряжение есть работа сил электрического поля по переносу единицы электрического заряда (4.1) $U = A/q$. Вся работа на пути через C_1, C_2, C_3 равна сумме трех работ на этих участках (конденсаторах). Поскольку заряд на них одинаковый, имеем пятое правило для напряжений на последовательной цепочке конденсаторов:

$$U_1 + U_2 + U_3 = U. \quad (15.5)$$

Возьмем выражение (15.5) и поделим левую и правую часть на одно и то же число – на q . От этого равенство не изменится:

$$\frac{U_1}{q} + \frac{U_2}{q} + \frac{U_3}{q} = \frac{U}{q}.$$

В силу правила (15.4), мы можем заменить q на любой из зарядов q_1, q_2, q_3 . Заменяем:

$$\frac{U_1}{q_1} + \frac{U_2}{q_2} + \frac{U_3}{q_3} = \frac{U}{q}$$

и получаем шестое правило – правило сложения электрических емкостей в последовательной цепочке:

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{C}. \quad (15.6)$$

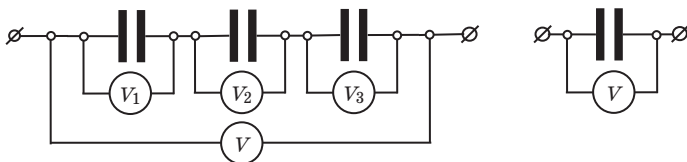


Рис. 15.5. Напряжения на последовательной цепочке конденсаторов

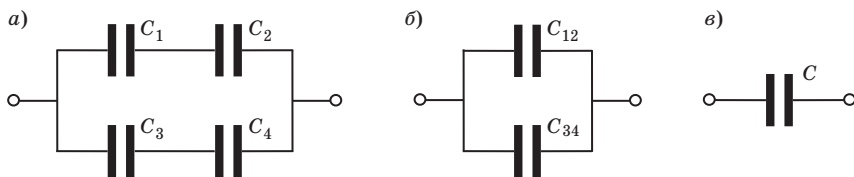


Рис. 15.6. Батарея из четырех конденсаторов (а) и эквивалентные схемы (б, в)

Найдем емкость батареи из четырех одинаковых конденсаторов C_1, C_2, C_3, C_4 , показанной на рис. 15.6.

Заменим электрическую схему (рис. 15.6, а) с четырьмя одинаковыми конденсаторами $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_0$ на эквивалентную параллельную цепочку (рис. 15.6, б), в которой

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_0} = \frac{2}{C_0}; \quad \Rightarrow \quad C_{12} = \frac{C_0}{2};$$

$$\frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_0} = \frac{2}{C_0}; \quad \Rightarrow \quad C_{34} = \frac{C_0}{2}.$$

Теперь заменим параллельную цепочку (рис. 15.6, б) на эквивалентную схему (рис. 15.6, в):

$$C = C_{12} + C_{34} = \frac{C_0}{2} + \frac{C_0}{2} = C_0.$$

Емкость батареи получилась такой же, как и у каждого конденсатора в ней. Зачем нужна такая батарея? В чем же выигрыш?

Если каждый конденсатор – элемент схемы (рис. 15.6, а) – был рассчитан, допустим, на 100 В, то эквивалентный конденсатор (рис. 15.6, в), имеющий такую же емкость, уже рассчитан на 200 В. Имеем выигрыш в предельно допустимом напряжении в 2 раза. Понятно, что подобную схему можно сделать из девяти одинаковых конденсаторов и получить выигрыш в напряжении в 3 раза...

16. Энергия электрического поля

16.1. Энергия взаимодействия системы электрических зарядов

Имеем систему точечных электрических зарядов $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$. Выберем один из них q_i и найдем потенциальную энергию его взаимодействия со всеми остальными зарядами. Эту задачу мы уже решали и решили – формула (2.6). Воспроизведем ее еще раз:

$$W_i = \sum_j W_{ij} = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = q_i \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} = q_i \Phi_i. \quad (16.1)$$

Сейчас перед нами стоит другая задача – найти потенциальную энергию взаимодействия всех зарядов со всеми. То есть надо про-

суммировать (16.1) по всем зарядам. Сделать это труднее, чем кажется на первый взгляд.

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \sum_j W_{ij} = \sum_{ij} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \quad (16.2)$$

Отметим, что энергия взаимодействия заряда q_i с зарядом q_j относится не к заряду i и не к заряду j , а к связи ij . Суммирование должно вестись по связям, но мы можем суммировать только по зарядам. Каждую связь образуют два заряда, поэтому каждая связь попадает в сумму 2 раза, поэтому

$$W = \sum_{ij} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i;$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i. \quad (16.3)$$

Здесь суммирование проводится по всем точечным зарядам.

16.2. Энергия заряженного проводника и конденсатора

Сообщим изолированному проводнику избыточный заряд q , который, как было доказано раньше, распределится по его поверхности. Поверхность проводника эквипотенциальна, т. е. $\varphi_i = \varphi = \text{const}$.

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i = \frac{\varphi}{2} \sum_i q_i = \frac{q\varphi}{2}. \quad (16.4)$$

Повторяя подобные рассуждения для заряженного конденсатора, мы должны взять потенциал одной его обкладки относительно другой, т. е. разность потенциалов или напряжение

$$W = \frac{qU}{2}. \quad (16.5)$$

Воспользуемся определением электрической емкости $C = \frac{q}{U}$ и напишем еще две формулы:

$$W = \frac{CU^2}{2}; \quad (16.6)$$

$$W = \frac{q^2}{2C}. \quad (16.7)$$

16.3. Энергия электрического поля

Только что мы получили формулу энергии заряженного конденсатора (16.6). Будем иметь в виду плоский конденсатор, в котором электрическое поле между обкладками однородное. Что мы еще помним о нем?

1. Напряжение U связано с напряженностью E формулой (8.13)

$$U = Ed, \quad (16.8)$$

где d – расстояние между обкладками.

2. Емкость плоского конденсатора, по формуле (14.7), равна

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \quad (16.9)$$

где S – площадь обкладок.

Подставляем (16.8) и (16.9) в (16.6) и получаем:

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S E^2 d^2}{d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S d}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V.$$

Оказывается, что энергия заряженного конденсатора пропорциональна его объему. Это говорит о том, что энергия сосредоточена не на поверхности конденсатора, а в пространстве между его обкладками. Введем объемную плотность энергии, т. е. энергию, приходящуюся на единицу объема:

$$w = \frac{W}{V}.$$

Объемная плотность энергии электрического поля равна

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (16.10)$$

Эту формулу можно записать по-другому, используя связь напряженности и индукции электрического поля $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$ (10.9):

$$w = \frac{DE}{2}, \quad (16.11)$$

$$w = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (16.12)$$

Если в пространстве имеется электрическое поле, то с ним обязательно связана некоторая энергия, объемная плотность которой находится по формулам (16.10), (16.11) или (16.12).

Формулы (16.10)–(16.12) получены для однородного поля, но они справедливы для электрического поля любой конфигурации.

17. Электрический ток

Электрическим током называется любое направленное движение электрических зарядов.

1. В металлах могут свободно перемещаться только электроны. Поэтому электрический ток в металлах есть направленное движение свободных электронов (электронов проводимости).

2. В электролитах нет свободных электронов, а подвижными заряженными частицами являются положительные и отрицательные ионы.

3. В плазме носителями тока могут быть как электроны, так и ионы обоих знаков.

Направлением тока условились считать направление движения положительно заряженных частиц. В металлах направление тока противоположно направлению движения электронов.

Линии, вдоль которых движутся заряженные частицы, называются *линиями тока*. Их направление совпадает с направлением тока, т. е. с направлением движения положительных зарядов. Если внутри проводника с током мысленно выделить трубку, у которой боковая поверхность состоит из линий тока, то заряженные частицы при движении не пересекают ее поверхности. Такая трубка, показанная на рис. 17.1, называется *трубкой тока*. Поверхность провода в изоляции тоже является трубкой тока.

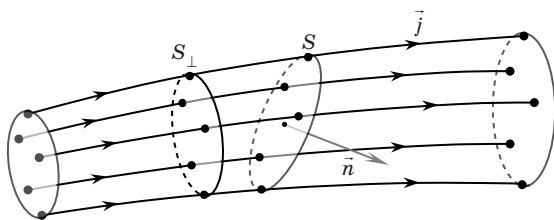


Рис. 17.1. Трубка тока

Рассмотрим сечение трубки тока S . Эта поверхность может быть произвольно ориентирована по отношению к линиям тока. Важно только, чтобы все линии тока ее пересекали. Пусть за некоторое время Δt поверхность S пересекает заряд Δq . Кроме того, полагаем, что поток зарядов по трубке стационарен, т. е. не меняется со временем.

Силой тока, или просто *током*, называется отношение заряда, пересекшего сечение проводника ко времени, в течение которого это произошло:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (17.1)$$

Такой ток называется постоянным.

Электрический ток измеряется в амперах. Определение одного ампера будет дано позже, в разделе «Магнитостатика». В Международной системе единиц ампер – основная единица, через нее выражается единица электрического заряда – кулон

$$1 \text{ кулон} = 1 \text{ ампер} \cdot 1 \text{ секунда}.$$

Если поток зарядов по трубке не является стационарным, т. е. ток не является постоянным, то для определения электрического тока нужно воспользоваться понятием производной:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (17.2)$$

Плотностью тока называется ток, пересекающий единицу поверхности поперечного сечения проводника. Сказанное обозначает, что нужно взять сечение проводника S_{\perp} на рис. 17.1 и поделить ток на него:

$$j = \frac{I}{S_{\perp}}. \quad (17.3)$$

В случае, когда среда неоднородна или движение зарядов в различных трубках тока разное, формулу (17.3) уточняют:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (17.4)$$

Выберем проводник в форме прямоугольного параллелепипеда, как показано на рис. 17.2. Электрические заряды q двигаются со скоростью v в направлении ребра ℓ . Пусть в выбранном объеме

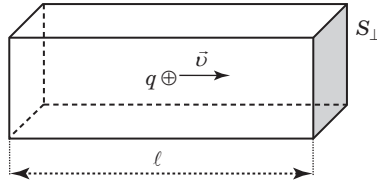


Рис. 17.2. Направленное движение зарядов в проводнике

находится N зарядов. За время $\Delta t = \ell/v$ все они пересекут правую грань параллелепипеда S_{\perp} . Найдем ток в проводнике в течение этого времени:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{Nqv}{\ell}.$$

Поделим левую и правую части на площадь торца и получим плотность тока:

$$\vec{j} = \frac{I}{S_{\perp}} = \frac{Nqv}{\ell S_{\perp}} = \frac{Nqv}{V},$$

где V – объем проводника; дробь $N/V = n$ – концентрация зарядов.

Поставим стрелочки над векторными величинами и перепишем формулу в окончательном виде:

$$\vec{j} = nq\vec{v}. \quad (17.5)$$

Плотность электрического тока – векторная величина. Направление этого вектора совпадает с направлением скорости положительных зарядов и противоположно направлению скорости отрицательных зарядов. Линии тока, введенные ранее, по сути, есть линии вектора \vec{j} .

Если в веществе имеется несколько различных типов носителей заряда, то в формуле (17.5) будет несколько слагаемых. Носители могут иметь разные знаки заряда, разные валентности, разные скорости и разные концентрации. Обозначим буквой e элементарный заряд¹ и перепишем формулу (17.5), ограничившись носителями с валентностью не больше 2:

$$\vec{j} = e(n^{+\bar{v}^{+}} - n^{-\bar{v}^{-}}) + 2e(n^{++\bar{v}^{++}} - n^{--\bar{v}^{--}}). \quad (17.7)$$

Мы не рассматривали возможность того, что разные носители, например, электроны и отрицательные ионы, могут иметь одинаковые

¹ $e = +1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл.

заряды. Полученная формула без труда может быть распространена на все подобные случаи.

Обратим внимание на то, что все типы носителей дают вклад одного направления в плотность тока. Положительные заряды движутся в одном направлении, отрицательные – в другом. Произведение заряда на вектор скорости имеет одинаковое направление для положительных и отрицательных зарядов.

Электрический ток, как и любой поток, – скалярная величина, хотя он и имеет направление. Плотность тока – вектор. Ток в среде через поверхность произвольной формы связан с плотностью тока соотношением

$$I = \int_{(S)} (\vec{j} d\vec{S}). \quad (17.8)$$

Аналогичным соотношением связан любой поток с соответствующей плотностью потока.

18. Закон Ома в обыкновенной и дифференциальной формах

18.1. Закон Ома для участка цепи

Рассмотрим проводник, по которому течет электрический ток. Ток в металлах (проводниках первого рода) может возникнуть только в случае, когда концы проводника находятся в точках с разными потенциалами. Силу тока в проводнике измеряют амперметром, падение напряжения на нем (или напряжение на его концах) – вольтметром. Считаем оба измерительных прибора идеальными (что это значит, обсудим позже). На рис. 18.1 приведена соответствующая схема. Проводник обозначен прямоугольником с буквой R .

Если поддерживать напряжение (разность потенциалов) на концах проводника постоянным, то в цепи будет течь постоянный ток. Если изменить напряжение на проводнике в несколько раз, то ток изменится во столько же раз.

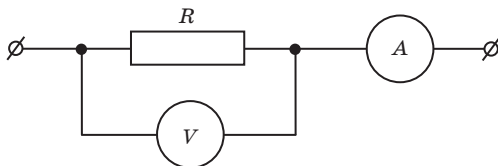


Рис. 18.1. Участок цепи с измерительными приборами

Отношение падения напряжения на проводнике к силе тока в нем есть величина постоянная, называемая электрическим сопротивлением:

$$\frac{U}{I} = R. \quad (18.1)$$

Или, то же самое другими словами:

сила тока на участке цепи прямо пропорциональна напряжению на его концах и обратно пропорциональна сопротивлению проводника:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (18.1.1)$$

Итак, мы выяснили, что электрическое сопротивление участка цепи не зависит от приложенного напряжения и от силы тока в цепи. От чего же оно тогда зависит? От самого проводника: от его размеров, формы и от материала, из которого он изготовлен. Для тонкого длинного проводника справедливо

$$R = \frac{\rho \ell}{S}, \quad (18.2)$$

где ℓ – длина проводника; S – площадь поперечного сечения; ρ – удельное сопротивление материала, из которого он изготовлен.

Как показывает опыт, удельное сопротивление проводников первого рода (металлов) прямо пропорционально абсолютной температуре $\rho \sim T^1$.

Электрического сопротивления у металлов вообще не должно быть, оно должно равняться нулю. Такое состояние называется сверхпроводимостью и существует для большинства материалов при температурах, близких к абсолютному нулю. Наличие электрического сопротивления при более высоких температурах объясняют присутствием микроскопических сил сопротивления, возникающих при движении носителей заряда по кристаллической решетке.

18.2. Закон Ома в дифференциальной форме

Рассмотрим элемент проводника, по которому течет электрический ток. Выберем проводник в форме прямоугольного паралле-

¹ Температурная зависимость удельного сопротивления, вообще говоря, противоречит закону Ома.

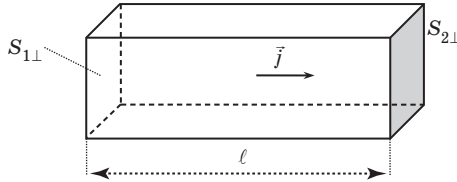


Рис. 18.2. Электрический ток в элементе проводника

лепипеда. Между левым и правым торцами приложено напряжение U . В случае протекания электрического тока условия (9.1) и (9.2) не обязаны и не могут выполняться. Не обязаны, поскольку имеем дело с движением зарядов (не статика). Не могут, поскольку поверхность и объем проводника не эквипотенциальны. Имеется и поддерживается постоянная разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ на концах проводника. В таком случае между торцами $S_{1\perp}$ и $S_{2\perp}$ возникает электрическое поле, которое будем считать однородным:

$$U = E\ell. \quad (18.3)$$

Электрический ток I связан с плотностью тока j соотношением (17.3):

$$I = jS_{\perp}. \quad (18.4)$$

Электрическое сопротивление R связано с его формой и размерами соотношением (18.2). Подставим в закон Ома все найденные величины (18.2)–(18.4):

$$\frac{E\ell}{jS_{\perp}} = \frac{\rho\ell}{S_{\perp}}; \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \rho\vec{j}. \quad (18.5)$$

Вводим удельную проводимость вещества $\sigma = \frac{1}{\rho}$ и переписываем (18.5):

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}. \quad (18.6)$$

Формулы (18.5), (18.6) – это две эквивалентные формулировки закона Ома в дифференциальной форме. Их отличие от формул (18.1), (18.1.1) в том, что они относятся не к проводнику в целом, а к некоторой его точке. Последние формулы локальные.

Из формулы (18.6) однозначно следует, что:

- внутри проводника с током есть электрическое поле;
- линии тока идут так же, как линии напряженности.

19. Параллельное и последовательное соединение проводников

Проводник, имеющий электрическое сопротивление, называется резистором и является необходимым элементом большинства электрических схем. Он обозначается специальным графическим символом и подписывается буквой R^1 (рис. 19.1).

В некоторых случаях резисторы соединяют в параллельные цепочки. На рис. 19.2 слева показаны три резистора, включенные в такую цепочку. Нужно заменить резисторы R_1, R_2, R_3 одним эквивалентным резистором R (рис. 19.2 справа) и выразить ток, напряжение и электрическое сопротивление соответствующими величинами для каждого резистора этой цепочки.

Электрический ток начинается на клемме \oplus и попадает на клемму \ominus либо через первый резистор, либо через второй, либо через третий. На пути от \oplus к \ominus заряды нигде не исчезают и нигде не возникают. Из закона сохранения электрического заряда следует первое правило для параллельной цепочки резисторов. Ток через цепочку равен сумме токов во всех резисторах:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I. \quad (19.1)$$

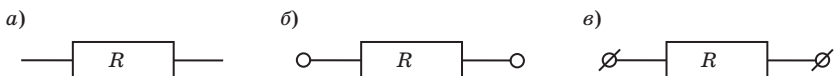


Рис. 19.1. Обозначение резистора в электрических схемах:
 а – обозначение резистора; б – резистор с клеммами;
 в – резистор включен в схему через клеммы

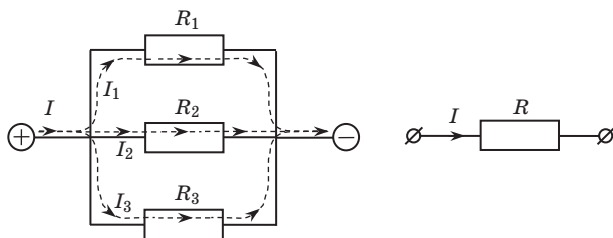


Рис. 19.2. Токи в параллельной цепочке резисторов

¹ Одной и той же буквой R обозначается и сам резистор, как элемент схемы, и его главное свойство – электрическое сопротивление. Не путайте.

Напряжения на резисторах R_1 , R_2 , R_3 и на R измеряются вольтметрами, подключенными в точках, показанных на рис. 19.3.

Нужно понимать, что электрическое сопротивление линии на рис. 19.3 равно нулю, поэтому A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 и AB – это одни и те же точки подключения вольтметра. Поэтому все вольтметры на рис. 19.3 покажут одно и то же напряжение. Имеем второе правило для параллельной цепочки:

$$U_1 = U_2 = U_3 = U. \quad (19.2)$$

Возьмем выражение (19.1) и поделим левую и правую часть на одно и то же число – на U . От этого равенство не изменится:

$$\frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \frac{I_3}{U} = \frac{I}{U}.$$

В силу правила (19.2), мы можем заменить U на любое из U_1 , U_2 , U_3 . Заменяем:

$$\frac{I_1}{U_1} + \frac{I_2}{U_2} + \frac{I_3}{U_3} = \frac{I}{U}$$

и получаем правило сложения сопротивлений в параллельной цепочке:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R}. \quad (19.3)$$

В некоторых случаях резисторы соединяют в последовательные цепочки. На рис. 19.4 слева показаны три резистора, включенные в такую цепочку. Нужно заменить резисторы R_1 , R_2 , R_3 одним эквивалентным резистором R (рис. 19.4 справа) и выразить ток, напря-

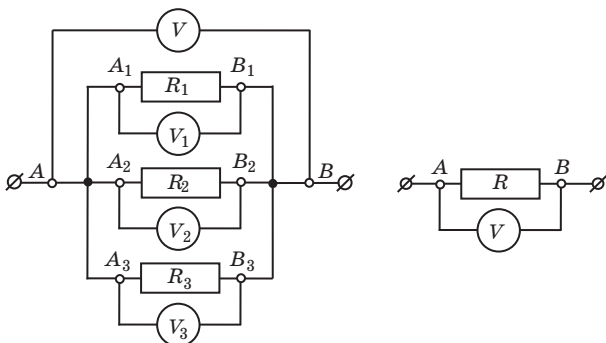


Рис. 19.3. Напряжения на резисторах в параллельной цепочке

жение и электрическое сопротивление соответствующими величинами для каждого резистора этой цепочки.

Ток, вытекающий из клеммы \oplus , попадает на клемму \ominus , проходя последовательно через первый, второй и третий резисторы. На пути от \oplus к \ominus заряды нигде не исчезают и не возникают. Из закона сохранения электрического заряда следует, что все токи I_1, I_2, I_3 и ток через цепочку I одинаковы:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I. \quad (19.4)$$

Для того, чтобы измерить напряжение на резисторах R_1, R_2, R_3 и на цепочке в целом, нужно вольтметры подключить к обозначенным на рис. 19.4 точкам A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 и AB .

Вспомним, что напряжение есть работа сил электрического поля по переносу единицы электрического заряда (4.1) $U = A/q$. Вся работа на пути через R_1, R_2, R_3 равна сумме трех работ на этих участках (резисторах). Поскольку через них проходит одинаковый заряд, имеем пятое правило для напряжений на последовательной цепочке резисторов:

$$U_1 + U_2 + U_3 = U. \quad (19.5)$$

Возьмем выражение (19.5) и поделим левую и правую части на одно и то же число – на I . От этого равенство не изменится:

$$\frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \frac{U_3}{I} = \frac{U}{I}.$$

В силу правила (19.4), мы можем заменить I на любой из I_1, I_2, I_3 . Заменяем:

$$\frac{U_1}{I_1} + \frac{U_2}{I_2} + \frac{U_3}{I_3} = \frac{U}{I}$$



Рис. 19.4. Токи через резисторы в последовательной цепочке

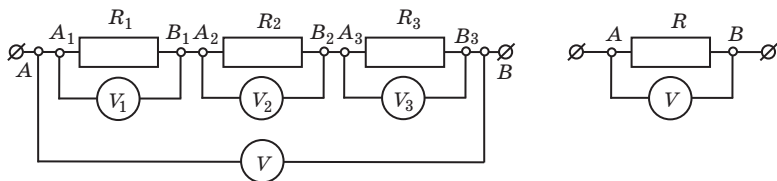


Рис. 19.5. Напряжения на резисторах в последовательной цепочке

и получаем шестое правило – правило сложения электрических сопротивлений в последовательной цепочке:

$$R_1 + R_2 + R_3 = R. \quad (19.6)$$

Понятно, что число резисторов в параллельной и последовательной цепочках (в примерах – три) качественно ничего не меняет во всех шести полученных правилах. Разумеется, все рассматриваемые резисторы могут иметь различные номиналы.

Вернемся к вопросу об измерительных приборах, который остался открытым в п. 18.1.

Вольтметр, имеющий собственное сопротивление, подключается параллельно к резистору. Напряжение на резисторе измеряется верно, но ток через него и электрическое сопротивление участка цепи меняется. Для того, чтобы искажения, вносимые вольтметром, были минимальны, нужно, чтобы сопротивление вольтметра было много больше сопротивления резистора.

| Идеальный вольтметр имеет бесконечно большое сопротивление.

Амперметр, имеющий собственное сопротивление, подключается последовательно к резистору. Сила тока через резистор измеряется верно, но напряжение на получившейся цепочке и электрическое сопротивление участка цепи становятся другими. Для того, чтобы искажения, вносимые амперметром, были минимальны, нужно, чтобы сопротивление амперметра было много меньше сопротивления резистора.

| Идеальный амперметр имеет нулевое сопротивление.

20. Закон Джоуля – Ленца в обыкновенной и дифференциальной формах

20.1. Закон Джоуля – Ленца в обыкновенной форме

При перемещении электрических зарядов по проводнику силы электрического поля совершают работу

$$A = qU. \quad (20.1)$$

Эта работа может быть преобразована в механическую энергию с помощью электромотора, может пойти на зарядку аккумулятора.

Если не происходит ни того, ни другого, то вся энергия выделяется в проводнике в виде тепла:

$$Q = qU. \quad (20.2)$$

Если в цепи протекает постоянный ток, то $q = It$.

Из закона Ома следует, что $U = IR$.

Подставим и то, и другое в формулу (20.2) и получим закон Джоуля – Ленца:

$$Q = I^2 R t. \quad (20.3)$$

20.2. Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме

Рассмотрим элемент проводника, по которому течет электрический ток. Выберем проводник в форме прямоугольного параллелепипеда. Электрический ток течет вдоль ребра ℓ . Его величина связана с плотностью тока j и площадью поперечного сечения S_{\perp} проводника соотношением (17.3):

$$I = jS_{\perp}. \quad (20.4)$$

Сопротивление длинного тонкого проводника, в соответствии с (18.2), равно

$$R = \frac{\rho \ell}{S_{\perp}}. \quad (20.5)$$

Подставим (20.4) и (20.5) в закон Джоуля – Ленца (20.3) и получим:

$$Q = \frac{j^2 S_{\perp}^2 \rho \ell t}{S_{\perp}} = j^2 \rho S_{\perp} \ell t = j^2 \rho V t,$$

где V – объем проводника.

Введем удельную тепловую мощность $\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V \Delta t}$ и вычислим ее:

$$\rho = \rho j^2. \quad (20.6)$$

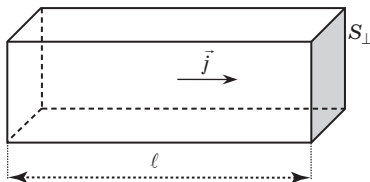


Рис. 20.1. Электрический ток в элементе проводника

Принимая во внимание закон Ома в дифференциальной форме (18.6)

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

получим еще одно выражение для удельной тепловой мощности:

$$p = \sigma E^2. \quad (20.7)$$

20.3. Мощность электрического тока

При перемещении электрических зарядов по проводнику силы электрического поля совершают работу (20.1). Возьмем производную по времени от этого выражения, полагая, что напряжение постоянно:

$$P = \frac{d(qU)}{dt} = \frac{dq}{dt} U = IU.$$
$$P = IU. \quad (20.8)$$

Получено выражение для полной потребляемой мощности электрического тока. Эта мощность может быть преобразована в механическую при помощи электромотора, может пойти на зарядку аккумулятора, но в любом случае часть этой мощности выделится в проводнике в виде тепла. Электромотор и аккумулятор отличаются от проводника тем, что для последнего справедлив закон Ома для участка цепи, т. е. $U = IR$. Получаем тепловую мощность, выделяющуюся в проводнике:

$$P_Q = I^2 R. \quad (20.9)$$

Вычисления по формулам (20.8) и (20.9) дают в общем случае разный результат. По (20.8) вычисляется вся электрическая мощность, за которую приходится платить деньги, а по (20.9) вычисляется та ее часть, которая идет на нагревание проводника.

Результаты совпадают, когда вся мощность идет только на нагревание, т. е. нагрузкой является резистор. В этом случае можно воспользоваться еще одной формулой:

$$P = \frac{U^2}{R}. \quad (20.10)$$

Эта формула годится только для вычисления мощности, выделяющейся в проводнике, электрообогревателе или лампочке накаливания.

21. Электрический ток в цепи с источником

21.1. Закон Ома для замкнутой цепи

Источник постоянного тока¹ обозначается в электрических схемах графическим символом, показанным на рис. 21.1. Большая тонкая черточка – клемма «плюс», маленькая толстая – «минус». Электрическая цепь должна быть замкнута, т. е. к клеммам должна быть подключена нагрузка, иначе ток не потечет. По всей цепи ток течет в одном направлении, не прерываясь.

Ток во внешней цепи течет от плюса к минусу, от большего потенциала к меньшему. Направление тока показано на рис. 21.1 стрелками. Линии тока должны быть непрерывными, поэтому внутри источника ток должен течь от минуса к плюсу, т. е. против силовых линий поля. Это означает, что в источнике обязательно должны действовать *сторонние* (неэлектрические) силы, которые перемещают положительные против силовых линий. Таковыми могут быть химические или магнитные силы. Первые действуют в батарейках и аккумуляторах, вторые – в генераторах.

Рассмотрим устройство медно-цинкового элемента Вольта (рис. 25.2). Если опустить в серную кислоту медный стержень (электрод), то медь начнет растворяться. В кислоте появятся ионы Cu^{++} , кислота зарядится положительно, а электрод – отрицательно. На границе между кислотой и медью возникнет скачок потенциала. Казалось бы, именно это и требуется, но воспользоваться получившейся разностью потенциалов не так просто, как кажется. Если другой электрод поместить непосредственно в кислоту, то с ним произойдет то же самое, что и с первым. Он тоже начнет растворяться и тоже

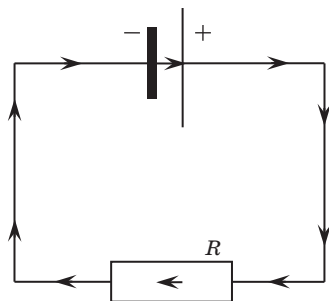


Рис. 21.1. Электрический ток в цепи

¹ На самом деле, скорее, источник постоянного напряжения.

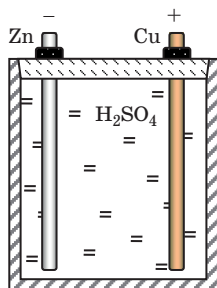


Рис. 21.2. Элемент Вольта

зарядится отрицательно. Если второй электрод взять из того же металла, что и первый, то потенциалы окажутся в точности одинаковыми.

Второй электрод должен отличаться от первого, его следует сделать, например, из цинка. В таком случае потенциалы электродов окажутся разными по величине, хотя относительно кислоты оба они будут отрицательными. Потенциал медного электрода будет больше, цинкового – меньше. Если герметично закрыть банку с электролитом и вывести наружу две клеммы, то на медной будет плюс, на цинковой – минус.

Положительный медный электрод называется *анодом*.
Отрицательный цинковый электрод называется *катодом*.

На рис. 21.3 вертикальными отрезками и серой наклонной линией качественно показан ход потенциала во внешней цепи от анода \oplus к катоду \ominus и в самом источнике от катода к аноду. По ходу тока во внешней цепи происходит падение напряжения, т. е. уменьшение потенциала от φ_1 до φ_2 . Электрические заряды скатываются по горке сверху вниз. В источнике ток течет в том же направлении, что и во внешней цепи. Поэтому в нем тоже происходит уменьшение потенциала от φ'_2 до φ'_1 . Возвращение потенциала к максимальному значению происходит двумя скачками на границах «катод – электролит» и «электролит – анод». В этих местах включаются сторонние химические силы.

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между катодом и анодом, по закону Ома для участка цепи, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR, \quad (21.1)$$

где R – сопротивление внешней цепи; I – ток в цепи. Источник, заполненный электролитом, имеет собственное *внутреннее* электри-

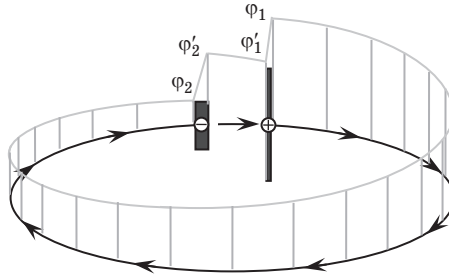


Рис. 21.3. Падение потенциала по ходу электрического тока:

— электрический ток в проводнике;
 — ход потенциала в электрической цепи

ческое сопротивление r . Для этого участка тоже справедлив закон Ома:

$$\phi'_2 - \phi'_1 = Ir. \quad (21.2)$$

Электрический ток в источнике I тот же, что и во внешней цепи. Сложим формулы (21.1) и (21.2) и сгруппируем слагаемые:

$$(\phi_1 - \phi'_1) + (\phi'_2 - \phi_2) = IR + Ir.$$

Обозначим скачки потенциала на аноде $\phi_1 - \phi'_1 = \varepsilon_1$ и на катоде $\phi'_2 - \phi_2 = \varepsilon_2$. Их сумму назовем *электродвижущей силой*, или, сокращенно, ЭДС¹, и обозначим буквой ε , $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Учитывая все сказанное, получаем закон Ома для замкнутой электрической цепи с источником:

$$\varepsilon = I(R + r). \quad (21.3)$$

Обычно эту формулу записывают в другом виде:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (21.4)$$

Ток в замкнутой цепи прямо пропорционален ЭДС источника и обратно пропорционален полному сопротивлению цепи.

Нужно понимать, что при подключении к источнику различных внешних нагрузок в формулах (21.3), (21.4) меняются две величины — R и I , а две другие — ε и r — остаются постоянными.

ЭДС и внутреннее сопротивление — это характеристики источника.

¹ ЭДС измеряется в вольтах. Именно ЭДС указывают на батарейках и других источниках постоянного тока.

21.2. Теорема о циркуляции вектора \vec{E} вдоль электрической цепи

Работа сторонних сил в источнике идет на увеличение потенциальной энергии зарядов:

$$A_{\text{ист}} = q((\varphi'_2 - \varphi_2) + (\varphi_1 - \varphi'_1)) = q(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) = q\varepsilon.$$

$$A_{\text{ист}} = q\varepsilon. \quad (21.5)$$

Эту работу совершают сторонние силы \vec{F}^* , которые действуют только в источнике. Можно формально считать, что они действуют по всей электрической цепи, но за пределами источника равны нулю:

$$A_{\text{ист}} = \int_{\text{ист}} (\vec{F}^* d\vec{\ell}) = \int_{\text{ист}} q(\vec{E}^* d\vec{\ell}) = q \oint_{\ell} (\vec{E}^* d\vec{\ell}). \quad (21.6)$$

Символом \vec{E}^* обозначена напряженность поля сторонних сил. Интегрирование ведется по всей замкнутой электрической цепи. Приравниваем правые части формул (21.5), (21.6) и получаем:

$$\oint_{\ell} (\vec{E}^* d\vec{\ell}) = \varepsilon. \quad (21.7)$$

Кроме сторонних сил, на электрический заряд действуют еще электростатические силы с напряженностью \vec{E}° . Для этих сил справедлива теорема о циркуляции вектора \vec{E} . Когда мы ее формулировали, мы не рассматривали сторонние силы и не делали различия между векторами \vec{E} и \vec{E}° . Сейчас ее следовало бы сформулировать для вектора \vec{E}° :

$$\oint_{\ell} (\vec{E}^\circ d\vec{\ell}) = 0. \quad (21.8)$$

Договоримся считать вектором \vec{E} напряженность всех сил электрической и неэлектрической природы, действующих на носитель заряда:

$$\vec{E} = \vec{E}^\circ + \vec{E}^*. \quad (21.9)$$

Сложим формулы (21.7), (21.8) и получим теорему о циркуляции вектора \vec{E} вдоль электрического контура с током¹

$$\oint_{\ell} (\vec{E} d\vec{\ell}) = \varepsilon. \quad (21.10)$$

¹ При обходе контура с током в обратном направлении в формулах (21.7), (21.10) справа появится знак «минус».

МАГНЕТИЗМ

22. Историческая справка

С древних времен людям был известен компас – постоянный магнит, которым пользовались для определения сторон света. Магнитная стрелка является *магнитным диполем*, свойства которого аналогичны свойствам электрического диполя. Считалось, что намагниченная стальная спица имеет на своих концах два равных по модулю разноименных *магнитных заряда*. Заряд на северном конце стрелки считали положительным, на южном – отрицательным. Наша Земля сама является постоянным магнитом. Ее магнитные полюса примерно совпадают с географическими, только названия у них обратные. В Северном Ледовитом океане, недалеко от Северного географического полюса, находится Южный магнитный полюс. В Антарктиде – недалеко от Южного географического находится Северный магнитный полюс.

Если намагниченная спица длинная, то магнитные заряды находятся далеко друг от друга. Можно изучать каждый из них в отдельности. Рассмотрим взаимодействие двух магнитных зарядов на разных спицах. Взаимодействия с дальними зарядами (отрицательными на рис. 22.1) пренебрегаем.

Взаимодействие магнитных зарядов описывается законом Кулона:

$$F \sim \frac{q_{1m}q_{2m}}{r^2}. \quad (22.1)$$

Так же, как и в электростатике, вводим напряженность магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{q_m}. \quad (22.2)$$

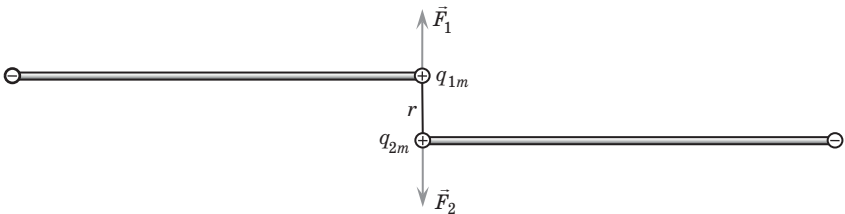


Рис. 22.1. Взаимодействие магнитных зарядов

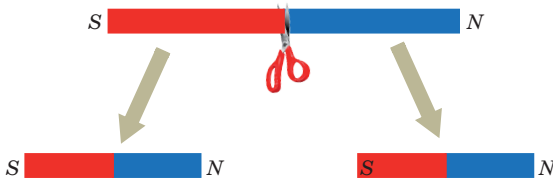


Рис. 22.2. Попытки получения изолированных магнитных зарядов

Напряженность поля отдельного магнитного заряда задается формулой

$$H = k' \frac{q_m}{r^2}, \quad (22.3)$$

где k' – константа, измеряемая на опыте.

Дальнейшее построение магнитостатики для постоянных магнитов аналогично электростатике. Существенное отличие состоит в том, что электрические заряды реально существуют, а магнитные – нет. Если разрезать намагниченную спицу или полосовой магнит на две части, каждая из них снова будет иметь два полюса и магнитный дипольный момент. Изолированных магнитных зарядов не получится (рис. 22.2).

Мельчайшим элементом, кирпичиком, из которого строится магнитостатика, является не магнитный заряд, а магнитный диполь. Осознание этого факта пришло не сразу. Столетиями делались попытки получить магнитные изолированные заряды, показанные на рис. 22.2. Что получалось в результате, показано там же. Понятие магнитного заряда можно ввести лишь косвенно по величине магнитного дипольного момента, воспользовавшись формулой

$$P_m = q_m \ell, \quad (22.4)$$

где ℓ – длина намагниченной спицы. Такая логика построения магнетизма сохранялась до середины XX в.

Сейчас отказались от несуществующих величин – магнитных зарядов. При этом пришлось опираться не на напряженность магнитного поля, а на другой вектор – на магнитную индукцию.

23. Магнитная индукция. Сила Ампера

Характеристикой магнитного поля является его способность воздействовать на провод с током. Назовем небольшой участок про-

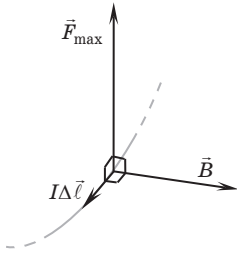


Рис. 23.1. Магнитная индукция

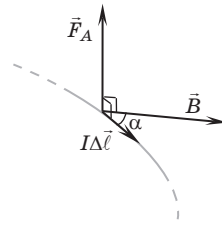


Рис. 23.2. Сила Ампера

вода $\Delta\vec{\ell}$ с током I элементом тока — $I\Delta\vec{\ell}$.¹ На элемент тока в магнитном поле действует сила, направленная перпендикулярно проводу, как это показано на рис. 23.1. Отметим, что определить силу, действующую именно на выделенный участок, а не на соседние, очень сложно. Считаем, что нам это удалось.

Повернем провод вокруг направления вектора силы. Величина силы изменится, а направление — нет (направление может поменяться на противоположное). Выберем положение провода, в котором сила, действующая на выделенный элемент тока, максимальна, и измерим ее. Эта сила F_{\max} пропорциональна элементу тока $I\Delta\ell$. Коэффициент пропорциональности называется *индукцией магнитного поля*, или просто *магнитной индукцией*:

$$B = \frac{F_{\max}}{I\Delta\ell}. \quad (23.1)$$

Единицей измерения магнитной индукции в системе СИ является *Вебер*:

$$B\text{В} = \frac{\text{кГ}}{\text{А} \cdot \text{с}^2}.$$

Если провод с током ориентирован произвольным образом, то на него действует сила Ампера, равная

$$\vec{F}_A = I[\Delta\vec{\ell}\vec{B}]. \quad (23.2)$$

$$\text{Величина этой силы равна } F_A = I\Delta\ell B\sin\alpha, \quad (23.3)$$

¹ Электрический ток, как и любой поток, является скаляром. Вектором является направленный кусок провода.

где α – угол между направлением провода и магнитной индукции. Сила Ампера всегда перпендикулярна плоскости этого угла. Векторы $\Delta\vec{l}$, \vec{B} , \vec{F}_A образуют правую тройку (рис. 23.2).

24. Закон Био – Савара – Лапласа. Принцип суперпозиции

В п. 22 магнитное поле вводилось через закон Кулона (22.1). Далее следовали две формулы: определение напряженности \vec{H} магнитного поля (22.2) как силы, действующей на единичный магнитный заряд, и выражение для напряженности магнитного поля, созданного отдельным магнитным зарядом (22.3). Обе эти формулы следуют из закона Кулона, вернее, содержатся в нем. Точно так же дело обстоит в электростатике. От такой логики построения магнетизма пришлось отказаться, поскольку магнитных зарядов нет, а без них вся логика построения «рассыпается».

В п. 23 индукция магнитного поля вводится через силу, действующую на элемент тока $I\Delta\vec{l}$. Магнитное поле не только действует на элемент тока, но оно и создается им. В прежнем подходе был закон Кулона, когда один заряд создавал поле, а другой в этом поле находился. Теперь такого закона нет, и нужно отдельно вводить закон, по которому элемент тока создает магнитное поле. Био и Савар поставили большое количество опытов, а Лаплас проанализировал их и сформулировал закон.

Итак, имеем провод с током, из которого выделим малый¹ элемент $I\Delta\vec{l}$. Магнитное поле в некоторой точке \vec{B} создается всем проводом, но сейчас нас интересует магнитная индукция $\Delta\vec{B}$, созданная только этим выбранным элементом. Сначала проведем

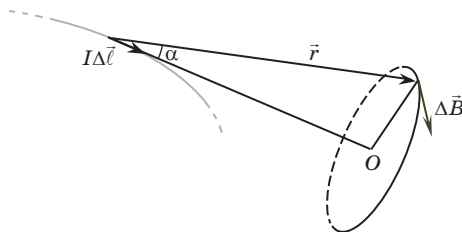


Рис. 24.1. Направление вектора магнитной индукции от элемента тока

¹ Термин малый обозначает, что расстояние до точки наблюдения много больше длины отрезка Δl .

касательную вдоль направления вектора $I\Delta\vec{\ell}$. После этого проведем окружность через интересующую нас точку так, чтобы центр окружности оказался на продолжении вектора $I\Delta\vec{\ell}$, а ее плоскость оказалась перпендикулярной этому вектору (рис. 24.1). Вектор $\Delta\vec{B}$, созданный элементом тока $I\Delta\vec{\ell}$, направлен по касательной к этой окружности. Одно из двух возможных направлений вектора выбирается по правилу *буравчика*, или *правого винта*. По закону Био – Савара – Лапласа, магнитная индукция, создаваемая элементом тока, равна

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[\Delta\vec{\ell}\vec{r}]}{r^3}, \quad (24.1)$$

где $I\Delta\vec{\ell}$ – элемент тока, создающий индукцию магнитного поля $\Delta\vec{B}$; \vec{r} – радиус-вектор; r – его длина; μ_0 – магнитная постоянная. В международной системе единиц

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Вб} \cdot \text{м}}{\text{А}}.$$

Введем угол α , обозначенный на рис. 24.1, и запишем тот же закон в скалярном виде:

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta\ell \sin\alpha}{r^2}. \quad (24.2)$$

Обязательным дополнением к этой формуле является правило буравчика, задающее направление вектора.

В действительности не может существовать изолированный элемент тока. В таком куске провода тока не будет. Провод должен идти от одной клеммы источника к другой. Электрическая цепь должна быть замкнутой. Провод состоит из большого числа маленьких элементов, и каждый из них создает в точке наблюдения свою магнитную индукцию $\Delta\vec{B}$. Мы наблюдаем результирующее поле от всего провода.

Принцип суперпозиции:

магнитная индукция от провода с током равна векторной сумме индукций, созданных каждым элементом провода.

$$\vec{B} = \sum \Delta\vec{B}_i. \quad (24.3)$$

Обратим внимание на аналогию формул электростатики и магнитостатики, если электрический заряд заменить элементом тока $q \rightarrow I\Delta\vec{\ell}$, а произведение вектора на число – векторным произведением.

	Электростатика	Магнитостатика
Элемент	q	$I\Delta\vec{\ell}$
Сила, действующая на элемент	$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = I[\Delta\vec{\ell}\vec{B}]$
Поле, создаваемое элементом	$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[\Delta\vec{\ell}\vec{r}]}{r^3}$

Пример. Магнитная индукция в центре кругового витка с током.

Имеется виток радиусом R с током I , показанный на рис. 24.2. Элемент тока с номером i создает в центре витка магнитную индукцию, направленную перпендикулярно плоскости рисунка «от нас». Величина, т. е. длина этого вектора, равна

$$\Delta B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta\ell_i}{R_i^2}.$$

Направления векторов $\Delta\vec{B}_i$ от всех элементов тока одинаковые – «от нас», следовательно, сумму векторов (24.3) можно заменить суммой их длин. Учтем также, что все R_i одинаковы и равны радиусу витка R .

$$B = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta\ell_i}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \sum_i \Delta\ell_i.$$

Получившаяся сумма равна длине окружности $\sum \Delta\ell_i = 2\pi R$, следовательно,

$$B = \frac{\mu_0 I 2\pi R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

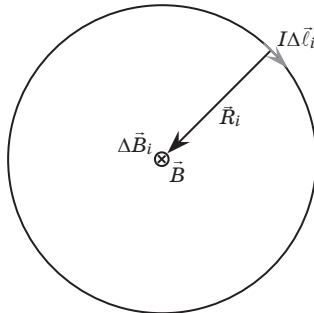


Рис. 24.2. Магнитная индукция витка с током

Итак, магнитная индукция в центре кругового витка с током равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (24.4)$$

25. Магнитная индукция прямого проводника с током. Взаимодействие проводников с токами

Рассмотрим прямой тонкий проводник с током, расположенный между обозначенными на рис. 25.1 точками OO' . По проводу течет ток I^1 . Нас интересует магнитная индукция тока в обозначенной точке на расстоянии b от провода. Отметим, что все элементы тока создают в этой точке магнитную индукцию одного направления. Значит, суммировать будем не векторы, а их длины. По закону Био – Савара – Лапласа (24.2), элемент тока $I d\ell$ создает в показанной на рис. 25.1 точке магнитную индукцию

$$dB = \frac{\mu_0 I d\ell \sin\alpha}{4\pi r^2}.$$

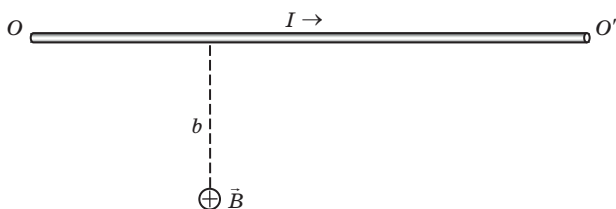


Рис. 25.1. Магнитная индукция от прямого провода с током

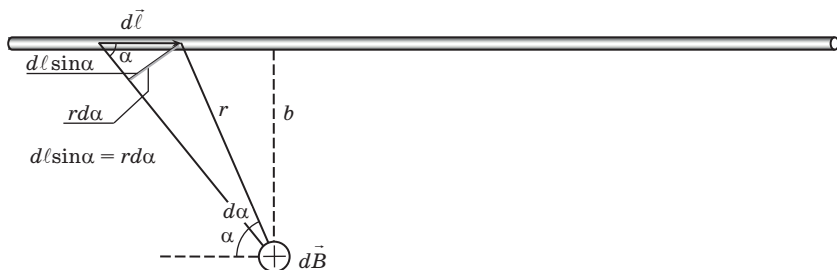


Рис. 25.2. Вывод формулы магнитной индукции прямого провода

¹ За пределами отрезка OO' проводник не заканчивается. Просто он меняет свое направление или форму.

Учтем, что $d l \sin \alpha = r d \alpha$, $\Rightarrow d B = \frac{\mu_0 I r d \alpha}{4 \pi r^2} = \frac{\mu_0 I d \alpha}{4 \pi r} = \dots$,

кроме того, надо учесть, что $r \sin \alpha = b$, т. е. $\frac{1}{r} = \frac{\sin \alpha}{b}$,

$$\dots = \frac{\mu_0 I \sin \alpha d \alpha}{4 \pi b} = -\frac{\mu_0 I d(\cos \alpha)}{4 \pi b}.$$

Получившееся выражение $d B = -\frac{\mu_0 I d(\cos \alpha)}{4 \pi b}$ интегрируем в пределах от начального угла α_1 до конечного α_2 , как это показано на рис. 25.3, и получаем:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4 \pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (25.1)$$

Если провод бесконечно длинный, то $\alpha_1 = 0$, $\cos \alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = \pi$, $\cos \alpha_2 = -1$. Разность, стоящая в скобках, равна 2. Магнитная индукция в этом случае равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi b}. \quad (25.2)$$

Бесконечно длинных проводов не бывает, но бывают очень длинные, для которых можно пользоваться этой формулой¹.

Рассмотрим два параллельных бесконечно длинных провода с токами, текущими в одном и том же направлении, как это показано на рис. 25.4.

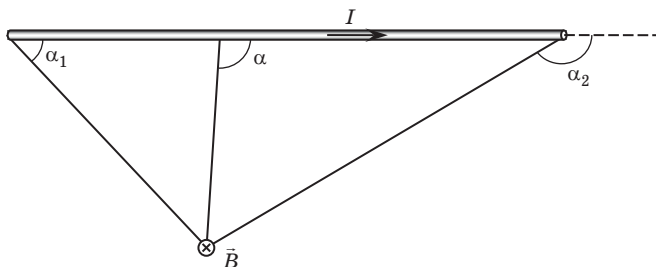


Рис. 25.3. Выбор начального и конечного углов

¹ Если угол $\alpha < 30^\circ$, а угол $\alpha > 150^\circ$, то точное значение B , вычисленное по (25.1), отличается от приближенного, вычисленного по (25.2), меньше, чем на 15 %.

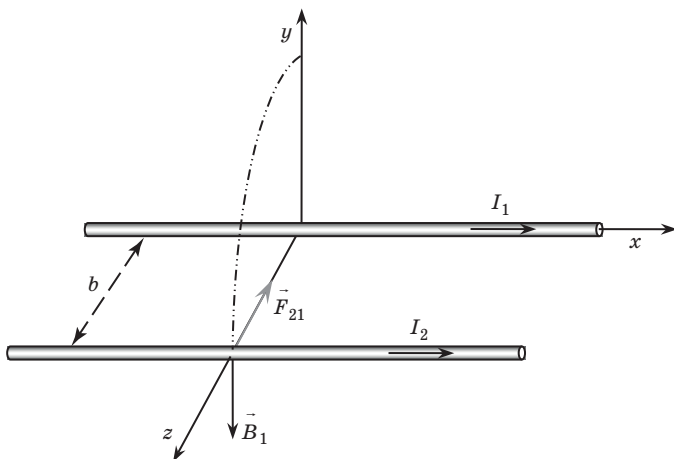


Рис. 25.4. Сила взаимодействия токов

Магнитная индукция \vec{B}_1 , создаваемая первым током в том месте, где проходит второй провод, направлена вертикально вниз. Ее величина равна

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}. \quad (25.3)$$

Сила Ампера \vec{F}_{21} , действующая на провод с током I_2 со стороны тока I_1 , показана на рис. 25.4. В рассматриваемом случае – это сила притяжения.

– Провода с токами одного направления притягиваются друг к другу.

– Провода с токами противоположных направлений отталкиваются друг от друга.

Найдем величину силы Ампера, действующей на элемент второго тока:

$$\Delta F_{21} = I_2 \Delta \ell B_1.$$

Подставляем (25.3) в это выражение и получаем:

$$\Delta F_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \Delta \ell}{2\pi b}.$$

Получившаяся сила одинаково зависит от обоих токов. Это означает, что она находится в полном соответствии с третьим законом Ньютона: $\Delta F_{21} = \Delta F_{12}$.

Запишем выражение для силы, действующей на единицу длины провода:

$$\frac{\Delta F}{\Delta \ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}. \quad (25.4)$$

Пусть по двум бесконечно длинным параллельным проводам, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга, текут одинаковые токи $I_1 = I_2 = 1$ А. Сила их взаимодействия, приходящаяся на единицу длины провода, равна

$$\frac{\Delta F}{\Delta \ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1}{2\pi \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ (Н/м)}. \quad (25.5)$$

При помощи полученного соотношения в Международной системе единиц СИ дают определение единицы измерения тока – ампера.

Один ампер – это такой ток, который, протекая по бесконечно длинному проводу, взаимодействует с другим таким же параллельным током на расстоянии 1 м от него с силой $2 \cdot 10^{-7}$ ньютона на каждый метр длины провода.

26. Магнитная индукция летящего электрического заряда. Сила Лоренца

Рассмотрим положительный заряд q , летящий со скоростью \vec{v} в направлении, указанном на рис. 26.1. За некоторое малое время Δt заряд пролетает расстояние $\Delta \vec{\ell} = \vec{v} \Delta t$. Сказанное обозначает, что в течение этого времени по участку $\Delta \vec{\ell}$ течет ток $I = q/\Delta t$ ¹. Элемент этого тока равен

$$I \Delta \vec{\ell} = \frac{q}{\Delta t} \vec{v} \Delta t = q \vec{v}. \quad (26.1)$$

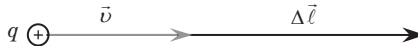


Рис. 26.1. Элемент тока, созданный летящим зарядом

¹ Элемент тока, созданный отрицательным зарядом, будет иметь противоположное направление.

Подставим получившееся выражение в закон Био – Савара – Лапласа (24.1) и получим магнитную индукцию, созданную летящим электрическим зарядом:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q [\vec{v}\vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (26.2)$$

Запишем то же выражение в скалярном виде:

$$B = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \sin \alpha, \quad (26.3)$$

где α – угол между направлениями скорости заряда и радиус-вектора.

Снова повторим рассуждения, которые привели к соотношению (26.1). На этот раз найдем силу, действующую на получившийся элемент тока. В формулу (23.2) подставляем $q\vec{v}$ вместо $I\Delta\vec{\ell}$ и получаем силу Лоренца, действующую на движущийся электрический заряд в магнитном поле:

$$\vec{F}_\Lambda = q[\vec{v}\vec{B}]. \quad (26.4)$$

На рис. 26.2. показана сила Лоренца, действующая на заряды разного знака в магнитном поле с индукцией, направленной вдоль оси ox . Направление силы Лоренца, действующей на летящий положительный заряд, определяется по правилу левой руки (рис. 26.3); на отрицательный заряд – по правилу правой руки.

Правило левой руки для положительных зарядов

Если расположить четыре выпрямленных пальца левой руки по направлению скорости частицы так, чтобы линии магнитной индукции входили в ладонь, то отогнутый большой палец покажет направление силы Лоренца, действующей на заряд.

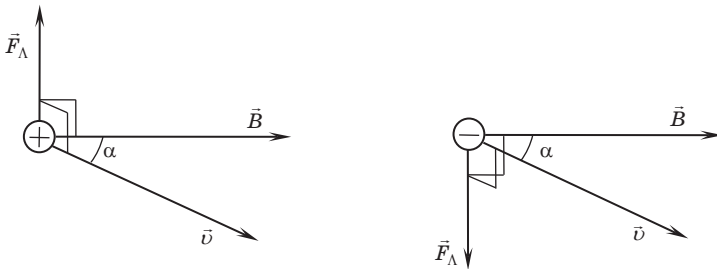


Рис. 26.2. Сила, действующая на летящий электрический заряд в магнитном поле

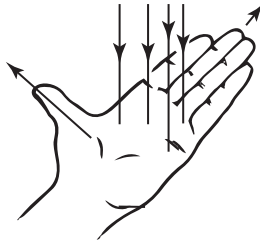


Рис. 26.3. Правило левой руки

Правило правой руки для отрицательных зарядов – аналогично. Величина силы Лоренца, т. е. выражение (26.4) в скалярной форме:

$$F_{\Lambda} = q v B \sin \alpha, \quad (26.5)$$

где α – угол между направлениями скорости и магнитной индукции.

27. Взаимодействие движущихся электрических зарядов

Рассмотрим два электрических заряда q_1 и q_2 , летящих со скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 вдоль оси (ox) на расстоянии r друг от друга, как показано на рис. 27.1. Для определенности будем считать заряды положительными.

Летащий положительный заряд q_1 создает вокруг себя магнитное поле с индукцией \vec{B}_1 , направление которой в точке 2 показано на рис. 27.1. Величину магнитной индукции B_1 можно найти по формуле (26.3), принимая $\sin \alpha = 1$:

$$B_1 = \frac{\mu_0 q_1 v_1}{4\pi r^2}. \quad (27.1)$$

В магнитном поле первого заряда оказывается второй заряд q_2 . На него действует сила \vec{F}_{21} , направление которой показано на рис. 27.1. Величину этой силы можно найти по формуле (26.4), снова принимая $\sin \alpha = 1$:

$$F_{21} = q_2 v_2 B_1. \quad (27.2)$$

Подставим B_1 из формулы (27.1) в формулу (27.2) и найдем силу магнитного взаимодействия летящих зарядов:

$$F_{\Lambda} = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r^2} v_1 v_2. \quad (27.3)$$

В рассмотренном случае, когда заряды одноименные и $\vec{v}_1 \uparrow \uparrow \vec{v}_2$, сила Лоренца – сила притяжения. Если поменять знак одного

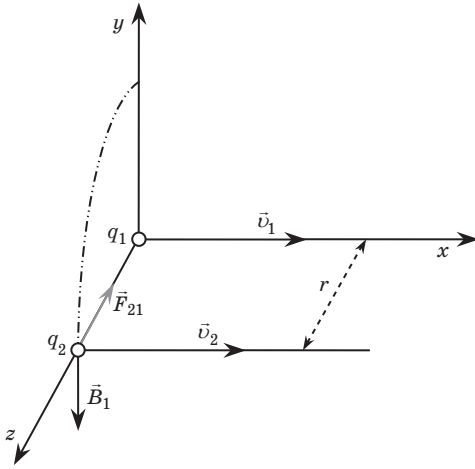


Рис. 27.1. Магнитное взаимодействие электрических зарядов

из зарядов или изменить направление одной из скоростей на противоположное (т. е. любым способом поменять направление элемента тока $q\vec{v}$), то сила Лоренца станет силой отталкивания.

Вспомним, что, кроме силы Лоренца, на электрические заряды действует еще и сила Кулона, величина которой равна

$$F_K = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (27.4)$$

Полагая скорости зарядов одинаковыми, найдем отношение этих сил:

$$\frac{F_A}{F_K} = \frac{\frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r^2} v^2}{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}} = \frac{4\pi r^2 q_1 q_2}{4\pi r^2 q_1 q_2} \epsilon_0 \mu_0 v^2 = \epsilon_0 \mu_0 v^2.$$

В дальнейшем будет доказано, что $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$ — скорость света в вакууме. Пока можно лишь убедиться в соответствующей размерности этого выражения и найти его численное значение:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / \text{Н} \cdot \text{м}^2; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Вб} \cdot \text{м} / \text{А};$$

$$[\epsilon_0] = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3}; \quad [\mu_0] = \frac{\text{Вб} \cdot \text{м}}{\text{А}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2};$$

$$[\varepsilon_0 \mu_0] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}; \quad \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \right] = \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = \frac{1}{\sqrt{111,2 \cdot 10^{-19}}} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Отношение силы Лоренца к силе Кулона оказывается равным

$$\frac{F_{\Lambda}}{F_{\text{К}}} = \frac{v^2}{c^2}. \quad (27.5)$$

Полученный результат свидетельствует о том, что:

- сила Лоренца есть релятивистская поправка к силе Кулона;
- магнитное поле есть релятивистская поправка к электрическому полю.

28. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Заряженная частица влетает со скоростью \vec{v} в магнитное поле с индукцией \vec{B} . Как она будет двигаться? Рассмотрим три случая.

1. Частица влетает параллельно линиям индукции магнитного поля:

$$\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{B} \text{ или } \vec{v} \uparrow \downarrow \vec{B}; \quad \sin \alpha = 0;$$

$$F_{\Lambda} = qvB \sin \alpha = 0.$$

Частица движется прямолинейно равномерно.

2. Частица влетает в магнитное поле перпендикулярно линиям индукции:

$$\vec{v} \perp \vec{B}; \quad \sin \alpha = 1; \quad F_{\Lambda} = qvB.$$

Сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно скорости частицы $\vec{F}_{\Lambda} \perp \vec{v}$ (формула (26.4), рис. 26.2). Такая сила обязательно является центростремительной.

Заряженная частица движется по окружности в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции.

$$qvB = \frac{mv^2}{R}; \quad qvB = \frac{mv}{R}; \quad \frac{qvB}{m} = \frac{v}{R} = \omega = \frac{2\pi}{T},$$

где ω – угловая скорость вращения частицы; T – период обращения или время одного оборота:

$$T = \frac{2\pi m}{Bq}. \quad (28.1)$$

Период обращения не зависит от скорости частицы, а зависит лишь от индукции магнитного поля и от удельного заряда частицы.

3. Частица влетает в магнитное поле под некоторым углом α к линиям индукции. В этом случае рассматриваются две проекции скорости: $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$.

$$\begin{aligned} v_{\parallel} &= v \cos \alpha; \\ v_{\perp} &= v \sin \alpha. \end{aligned} \quad (28.2)$$

Частица совершает сразу два движения: равномерное прямолинейное со скоростью v_{\parallel} и вращательное со скоростью v_{\perp} . В результате наложения этих движений частица движется по винтовой линии (рис. 28.1).

Поскольку период вращения не зависит от скорости v_{\perp} частицы, для него справедлива формула (28.1).

Шаг винтовой линии – расстояние между ее витками, это расстояние, которое частица проходит со скоростью v_{\parallel} за время одного оборота $h = v_{\parallel} T$.

$$h = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}. \quad (28.3)$$

Траектория является правым винтом, если произведение $q \cos \alpha < 0$.

Траектория является левым винтом, если произведение $q \cos \alpha > 0$.

Отметим, что во всех трех случаях скорость частицы остается постоянной по величине. Магнитное поле меняет только направление скорости частицы. Сила Лоренца не меняет кинетическую энергию заряженной частицы.

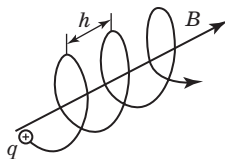


Рис. 28.1. Движение заряженной частицы в магнитном поле

29. Магнитная индукция контура с током

Рассмотрим квадратную рамку со стороной ℓ и током I . Направление нормали выбирается по правилу буравчика. Такая рамка называется *магнитным диполем*. Если расстояние, на котором изучается магнитное поле, много больше его геометрических размеров, диполь называется *точечным*.

На рис. 29.1 показаны рамка, состоящая из четырех элементов тока, и магнитные индукции, созданные каждым элементом:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4. \quad (29.1)$$

Каждая из четырех составляющих немного не перпендикулярна оси диполя и поэтому дает вклад в продольную компоненту вектора \vec{B} . На рис. 29.2 показан вид сверху на эту рамку. Элемент рамки l_1 смотрит «на нас», элемент l_3 – «от нас». Элементы l_2 и l_4 в этой проекции рассматривать не будем. Понятно, что их вклад B_2 и B_4 точно такой же, как и рассматриваемые нами B_1 и B_3 .

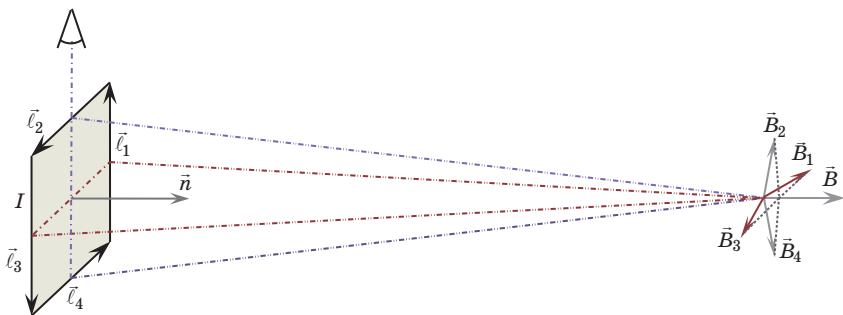


Рис. 29.1. Магнитная индукция рамки с током.
Наблюдение продольной компоненты

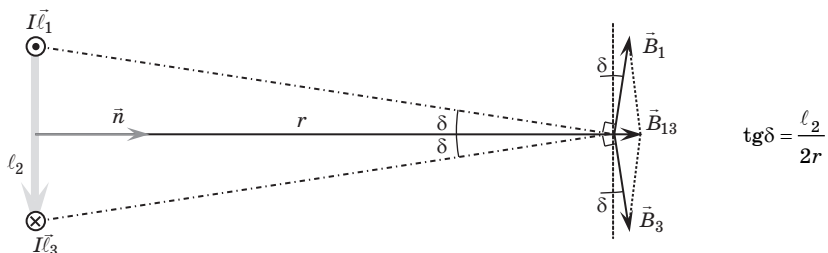


Рис. 29.2. Магнитная индукция рамки с током.
Вид сверху. Определение продольной компоненты

По закону Био – Савара – Лапласа (24.2), имеем:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I \ell_1}{4\pi r^2}. \quad (29.2)$$

Очевидно, что $B_1 = B_2 = B_3 = B_4$,

$$B_{\parallel} = 4B_1 \sin \delta.$$

Кроме того, понятно, что $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = \ell$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta$,

$$\sin \delta = \operatorname{tg} \delta = \frac{\ell}{2r}.$$

Таким образом, имеем:

$$B_{\parallel} = 4 \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi r^2} \frac{\ell}{2r} = \frac{4}{2} \frac{\mu_0 I \ell^2}{4\pi r^3} = 2 \frac{\mu_0 IS}{4\pi r^3}. \quad (29.3)$$

Буквой S обозначена площадь витка. Введем обозначение, назовем величину

$$P_m = IS \quad (29.4)$$

магнитным дипольным моментом рамки с током и перепишем результат (29.3):

$$B_{\parallel} = 2 \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3}.$$

Рассмотрим случай, когда точка наблюдения лежит под некоторым углом θ к оси диполя, т. е. к нормали, как показано на рис. 29.3.

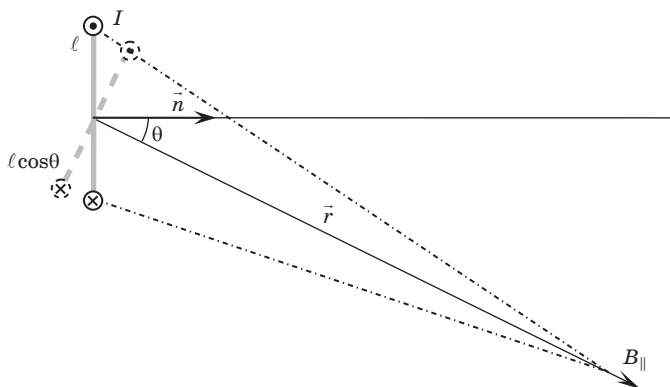


Рис. 29.3. Продольная компонента магнитной индукции под углом к оси диполя

В этом случае вместо площади рамки в (29.4) нужно подставить площадь ее «пунктирной» проекции, т. е. вместо S подставить $S \cos \theta$. Таким образом, имеем окончательное выражение для продольной компоненты вектора \vec{B} :

$$B_{\parallel} = 2 \cdot \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3} \cos \theta. \quad (29.5)$$

Будем искать магнитную индукцию в точке пространства, лежащей в плоскости рамки. Каждый элемент тока создает компоненту магнитного поля. На рис. 29.4 показаны направления и относительный масштаб этих компонент. Видно, что одна из них направлена налево (против направления нормали), а три – направо (по направлению нормали). Результирующая магнитная индукция \vec{B}_{\perp} направлена так же, как и вектор \vec{B}_3 . Посмотрим на эту картинку справа, как показано на рис. 29.5.

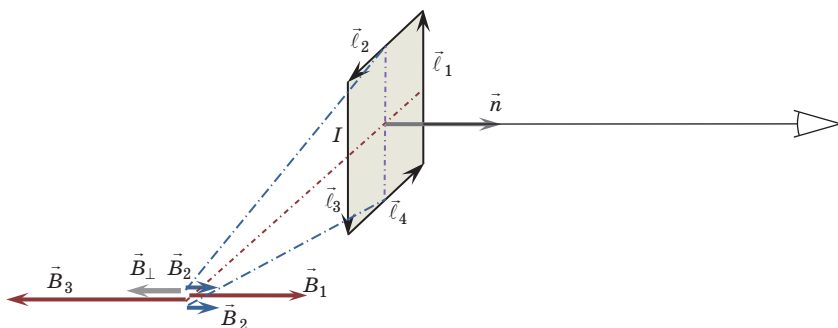


Рис. 29.4. Магнитная индукция рамки с током.
Наблюдение поперечной компоненты

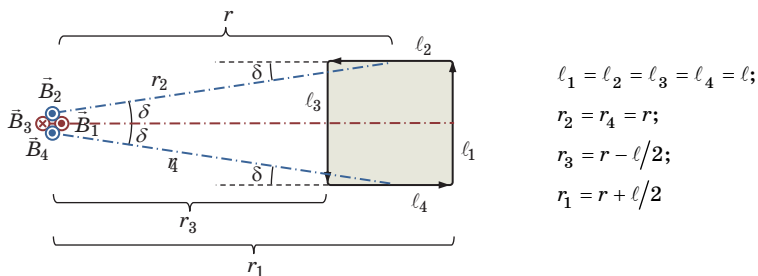


Рис. 29.5. Магнитная индукция рамки с током.
Вычисление поперечной компоненты

$$B_{\perp} = B_3 - B_1 - B_2 - B_4. \quad (29.6)$$

$$B_3 - B_1 = \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi r_3^2} - \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi r_1^2} = \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi} \frac{r_1^2 - r_3^2}{r_1^2 r_3^2} = \frac{\mu_0 I \ell (r_1 - r_3)(r_1 + r_3)}{4\pi (r_1 r_3)^2} = \dots$$

Учтем, что $r_1 - r_3 = \ell$, $r_1 + r_3 = 2r$, $r_1 r_3 = r^2$, $\ell^2 = S$, и закончим преобразования:

$$\dots = \frac{2\mu_0 I \ell^2 r}{4\pi r^4} = \frac{2\mu_0 I S}{4\pi r} = 2 \cdot \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r}.$$

$$B_2 = B_4 = \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi r^2} \sin \delta = \frac{\mu_0 I \ell^2}{4\pi 2r^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I S}{4\pi r^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3}.$$

Подставим получившиеся результаты в (29.6):

$$B_{\perp} = 2 \cdot \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3}.$$

Рассмотрим случай, когда точка наблюдения лежит под некоторым углом θ к оси диполя, т. е. к нормали, как показано на рис. 29.6.

Вместо площади рамки в (29.4) нужно подставить площадь ее проекции на направление радиус-вектора, показанную пунктиром

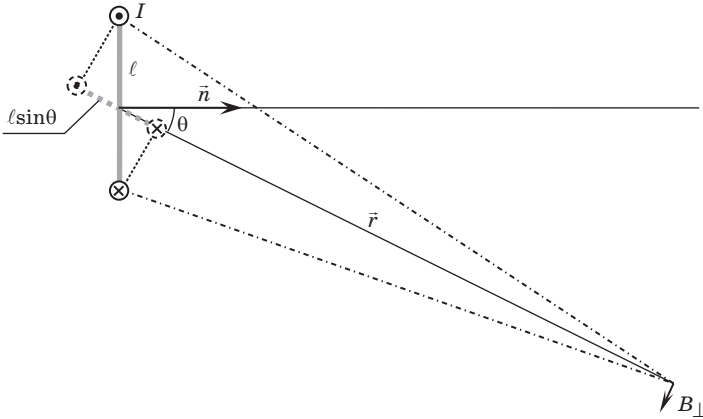


Рис. 29.6. Поперечная компонента магнитной индукции под углом к оси диполя

(S нужно заменить на $S \sin \theta$). Таким образом, имеем окончательное выражение для поперечной компоненты вектора \vec{B} :

$$B_{\perp} = \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3} \sin \theta. \quad (29.7)$$

Рассмотрим обе компоненты индукции магнитного поля, созданные точечным магнитным диполем. Их направления показаны на рис. 29.7.

Результирующий вектор \vec{B} направлен под углом α к радиус-вектору.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{B_{\perp}}{B_{\parallel}} = \frac{\frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3} \sin \theta}{2 \cdot \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3} \cos \theta} = \frac{1 \sin \theta}{2 \cos \theta} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \quad (29.8)$$

Величину магнитной индукции можно найти, сложив продольную и поперечную компоненты по теореме Пифагора $B^2 = B_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2$:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\left(\frac{2\mu_0 P_m}{4\pi r^3} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3} \sin \theta\right)^2} = \\ &= \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

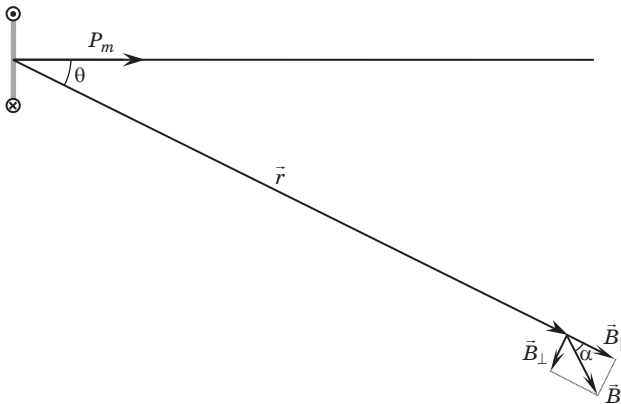


Рис. 29.7. Магнитная индукция точечного диполя в общем случае

$$B = \frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}. \quad (29.9)$$

Поле, заданное формулами (28.8), (28.9), является нецентральным.

Индукция этого поля уменьшается с расстоянием быстрее, чем для всех прочих известных нам магнитных полей, созданных:

- элементом тока (закон Био – Савара – Лапласа);
- отрезком прямого провода с током;
- летящим электрическим зарядом.

Магнитный дипольный момент зависит от площади, но не от формы рамки. Все полученные результаты справедливы для рамки любой формы площадью S .

30. Контур с током во внешнем магнитном поле

Рассмотрим квадратную рамку со стороной l и током I во внешнем однородном магнитном поле. Направление индукции магнитного поля, ориентация рамки и силы, действующие на каждую сторону, показаны на рис. 30.1.

1. Сила, действующая на рамку с током в однородном магнитном поле.

Силы направлены перпендикулярно проводу и в то же время перпендикулярно вектору магнитной индукции. Направления всех четырех сил, действующих на рамку, показаны на рис. 30.1. Поскольку поле однородное, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_3$, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_4$.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \mathbf{0}. \quad (30.1)$$

Сумма всех сил, действующих на контур с током в однородном магнитном поле, равна нулю.

2. Момент сил, действующий на рамку с током в магнитном поле.

Обратим внимание на то, что силы F_2 и F_4 лежат на одной прямой, а F_1 и F_3 не лежат. Следовательно, момент пары сил $M_{13} \neq 0$. На рис. 30.2 показан взгляд сверху со стороны оси ou на рамку с током, изображенную на рис. 30.1. Момент пары сил \vec{M}_{13} направлен вдоль «на нас» на рис. 30.2, вдоль оси ou – на рис. 30.1. Его величина равна

$$M_{13} = r_{13} F_3 \sin \alpha.$$

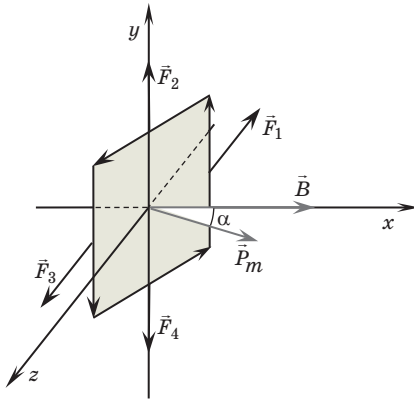


Рис. 30.1. Силы, действующие на элементы рамки с током

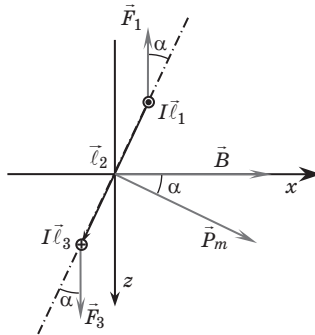


Рис. 30.2. Момент пары сил

Учтем, что $r_{13} = \ell_2$, а F_3 – сила Ампера, действующая на сторону ℓ_3 . Эта сила стремится развернуть рамку перпендикулярно линии магнитной индукции.

$$F_3 = I \ell_3 B \sin \alpha;$$

$$M = I \ell_2 \ell_3 B \sin \alpha = I S B \sin \alpha = P_m B \sin \alpha.$$

Поскольку все три угла α на рис. 30.2 – это один и тот же угол и вектор \vec{M} направлен перпендикулярно плоскости этого угла, получившуюся формулу можно переписать в векторном виде:

$$\vec{M} = \left[\vec{P}_m \vec{B} \right]. \quad (30.2)$$

В магнитном поле на контур с током действует момент сил, стремящихся ориентировать вектор магнитного дипольного момента вдоль силовых линий.

3. Потенциальная энергия рамки с током в магнитном поле.

Самым выгодным в магнитном поле будет такое положение рамки с током, когда дипольный момент ориентирован вдоль линий магнитной индукции. При повороте рамки (вектора дипольного момента) на угол θ , как это показано на рис. 30.3, совершается работа, т. е. меняется потенциальная энергия.

Малое изменение потенциальной энергии равно с обратным знаком элементарной работе по повороту диполя:

$$dW = -dA.$$

Работа по повороту абсолютно твердого тела на очень малый угол $d\theta$ равна

$$dA = (\vec{M}d\vec{\theta}).$$

На рис. 30.3 показаны направления векторов \vec{M} и $d\vec{\theta}$. Видно, что $\vec{M} \uparrow \downarrow d\vec{\theta}$,

$$(\vec{M}d\vec{\theta}) = -Md\theta.$$

Для величины вектора \vec{M} уже было получено выражение $M = P_m B \sin \theta$. Учитывая все вышесказанное, получаем:

$$dW = -dA = -(\vec{M}d\vec{\theta}) = Md\theta = P_m B \sin \theta d\theta = -P_m B d(\cos \theta).$$

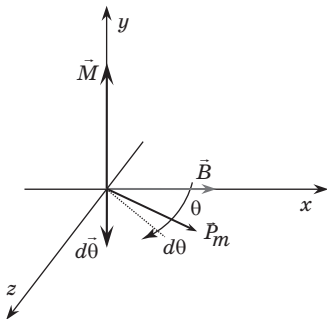


Рис. 30.3. Направления векторов

Поскольку длины векторов P_m и B не меняются, эти величины можно внести под знак дифференциала:

$$dW = -d(P_m B \cos\theta) = -d(\vec{P}_m \vec{B}).$$

Получившееся выражение обозначает, что $W = -(\vec{P}_m \vec{B}) + \text{const.}$ Константа зависит от выбора нуля потенциальной энергии. Если принять потенциальную энергию равной нулю в положении, когда дипольный момент перпендикулярен силовой линии, то эта константа равна нулю. В таком случае получаем:

$$W = -(\vec{P}_m \vec{B}). \quad (30.3)$$

В магнитном поле контур с током имеет потенциальную энергию, которая минимальна в положении, когда магнитный диполь ориентирован вдоль линий индукции, и максимальна — когда навстречу.

4. Сила, действующая на рамку с током в неоднородном поле.

Неоднородное магнитное поле, так же, как и однородное, стремится повернуть магнитный диполь вдоль силовых линий. Будем считать, что уже повернуло. Рассмотрим две конфигурации неоднородного магнитного поля, приведенные на рис. 30.4, *a* и *b*.

На рис. 30.4, *a* показаны сходящиеся линии магнитной индукции, которые существуют на краю соленоида или около южного полюса постоянного магнита. Сила Ампера направлена перпендику-

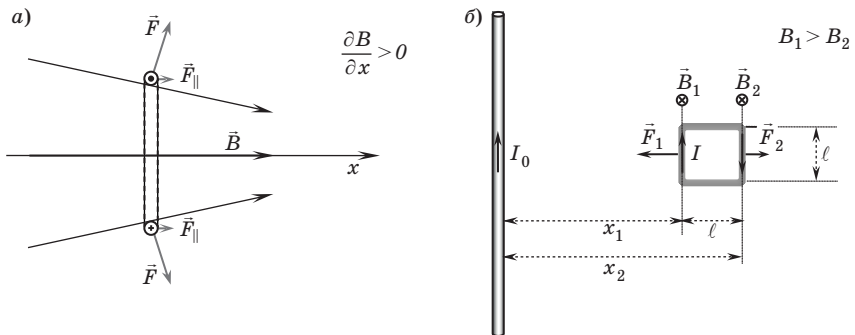


Рис. 30.4. Рамка с током в неоднородном магнитном поле:
a — линии индукции сгущаются вдоль оси ox ; *b* — линии индукции сгущаются по мере приближения к проводу с током

лярно вектору магнитной индукции, поэтому всегда имеется проекция силы на направление сгущения силовых линий. Возникает сила, затягивающая туда рамку с током.

На рис. 30.4, б показан вертикальный провод с током, создающий вокруг себя замкнутые силовые линии. Около провода эти линии расположены гуще, чем на некотором расстоянии от него. Это означает, что $B_1 > B_2$. Поэтому $F_1 > F_2$, и равнодействующая всех сил, приложенных к рамке, будет направлена к проводу в область сгущения силовых линий. Найдем эту силу:

$$F = F_1 - F_2 = B_1 I \ell - B_2 I \ell = (B_1 - B_2) I \ell = \Delta B I \ell = \dots$$

Учтем следующее: $\frac{\Delta B}{\Delta x} = \frac{\partial B}{\partial x}$; $\Rightarrow \Delta B = \frac{\partial B}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial B}{\partial x} \ell$ и продолжим:

$$\dots = \frac{\partial B}{\partial x} I \ell^2 = \frac{\partial B}{\partial x} I S = \frac{\partial B}{\partial x} P_m.$$

$$F = \frac{\partial B}{\partial x} P_m. \quad (30.4)$$

В неоднородном магнитном поле на ориентированный контур с током действует сила (30.4), которая затягивает этот контур в область сгущения силовых линий.

31. Теорема о циркуляции вектора \vec{B}

Пусть в некоторой области пространства существует магнитное поле. Совершим обход по замкнутой траектории l , как это показано на рис. 31.1. Разобьем траекторию на элементарные отрезки Δl . Считаем их настолько малыми, что траектория, состоящая из них, практически не отличается от l , и магнитную индукцию на их протяжении можно считать постоянной. Для каждого такого отрезка вычислим скалярное произведение $(\vec{B} d\vec{l})$. Циркуляцией вектора называется интеграл по замкнутой траектории $\oint_{(l)} (\vec{B} d\vec{l})$.

Формулировка теоремы о циркуляции вектора \vec{B} :

циркуляция вектора \vec{B} равна алгебраической сумме всех токов, охваченных контуром, умноженной на μ_0 .

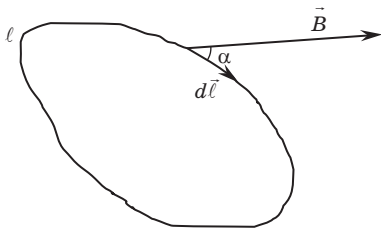


Рис. 31.1. Циркуляция вектора \vec{B}

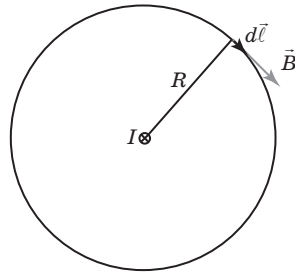


Рис. 31.2. Циркуляция вектора \vec{B} по окружности

Теорему докажем в три этапа.

1. Возьмем бесконечно длинный прямой провод с током. Контуром обхода будет окружность, перпендикулярная проводу с центром в этом проводе.

Направление обхода контура свяжем с направлением тока по правилу буравчика. В таком случае векторы $d\vec{l}$ и \vec{B} будут иметь одно направление. Их скалярное произведение будет равно произведению их длин $(\vec{B}d\vec{l}) = Bdl$. Кроме того, очевидно, что длина вектора B в любой точке окружности одинаковая.

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}d\vec{l}) = \oint_{(\ell)} Bdl = B \oint_{(\ell)} dl = B2\pi R = \dots$$

Вспомним, чему равна индукция магнитного поля от бесконечно длинного прямого проводника с током (25.2), и продолжим:

$$\dots = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I.$$

Итак, циркуляция вектора \vec{B} по выбранной окружности равна

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B}d\vec{l}) = \mu_0 I. \quad (31.1)$$

Если выбрать обратное направление обхода, то в этой формуле появится минус.

2. Возьмем бесконечно длинный прямой провод с током. Контур обхода будет произвольной формы. На рис. 31.3 показан элемент такого контура.

$$(\vec{B}d\vec{r}) = Bdr \cos\beta = Brd\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} rd\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\beta;$$

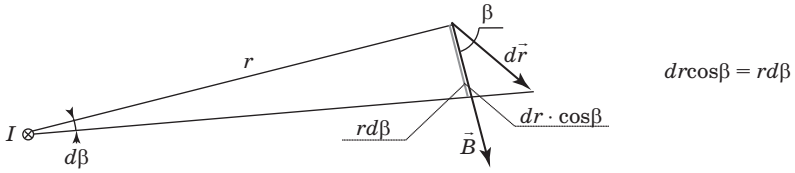


Рис. 31.3. Доказательство теоремы

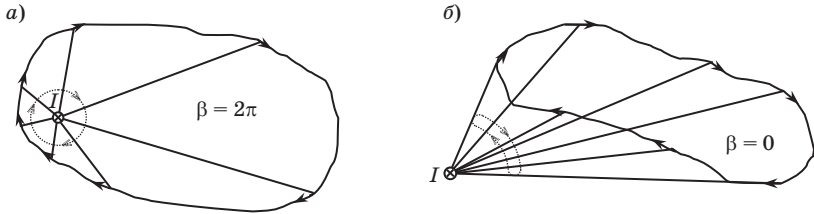


Рис. 31.4. Траектория, охватывающая (а) и не охватывающая (б) ток

$$\oint_{(l)} (\vec{B} d\vec{l}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\beta.$$

На рис. 31.4 показаны два возможных типа траекторий.

Если траектория обхода охватывает ток (рис. 31.4, а), то $\oint d\beta = 2\pi$, и

$$\oint_{(l)} (\vec{B} d\vec{l}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I.$$

Мы снова получаем формулу (31.1). Если же траектория не охватывает ток, как это показано на рис. 31.4, б, то $\oint d\beta = 0$, и

$$\oint_{(l)} (\vec{B} d\vec{l}) = 0. \quad (31.2)$$

3. Возьмем несколько проводов с различными токами. Контур обхода выберем произвольной формы, охватывающим не все токи (рис. 31.5).

По *принципу суперпозиции* магнитные поля, созданные различными токами, векторно складываются:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i.$$

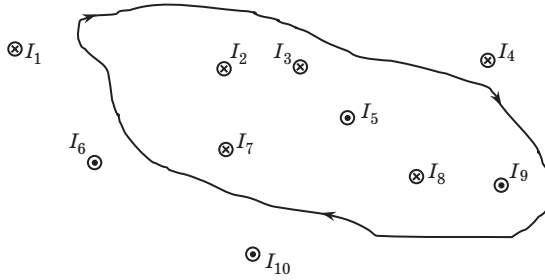


Рис. 31.5. Контур произвольной формы, несколько токов

Операции суммирования и интегрирования можно проводить в любом порядке:

$$\oint_{(\ell)} (\Sigma \vec{B}_i d\vec{\ell}) = \Sigma \oint_{(\ell)} (\vec{B}_i d\vec{\ell}) = \Sigma \mu_0 I_i = \mu_0 \Sigma I_i.$$

- Если направление тока связано с направлением обхода контура правилом буравчика, то такой ток берется со знаком «+».
- Если направление тока противоположное, то «-».
- Если ток не охвачен контуром, то вне зависимости от его направления он не учитывается.

Например: на рис. 31.5 в сумме 6 слагаемых:

$$\Sigma I_i = I_2 + I_3 - I_5 + I_7 + I_8 - I_9.$$

Вернемся к формулировке теоремы о циркуляции. Мы доказали, что

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B} d\vec{\ell}) = \mu_0 \Sigma I_i. \quad (31.3)$$

Суммирование токов ведется по описанному выше правилу. Теорема доказана.

32. Магнитное поле тороида и соленоида

Название «*тороид*» происходит от математического термина – «*тор*». Тор – это трехмерное тело, напоминающее бублик или кистевой эспандер (рис. 32.1).

Тороид – это катушка, равномерно намотанная на тор. Все витки находятся на одинаковом расстоянии друг от друга. Наша цель – найти магнитную индукцию такого тороида. Он показан

на рис. 32.2. Обратим внимание на то, что тороид имеет два радиуса: радиус кольца – R и радиус витка – r . Очевидно, что $R > r$. Как правило, $R \gg r$.

На тороид намотано N витков провода, по которому течет ток I . Понятно, что линии индукции направлены вдоль внутренней оси катушки, показанной на рис. 32.2 пунктирной линией. В данном случае направление силовых линий – по часовой стрелке. Выберем направление обхода вдоль силовой линии. В этом случае

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B} d\vec{\ell}) = B d\ell.$$

Из симметрии картинка очевидно, что в любой точке на оси катушки магнитная индукция будет одинаковой.

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B} d\vec{\ell}) = \oint_{(\ell)} B d\ell = B \oint_{(\ell)} d\ell = B\ell,$$

где $\ell = 2\pi R$ – длина катушки вдоль оси. По теореме о циркуляции вектора \vec{B} имеем:

$$\oint_{(\ell)} (\vec{B} d\vec{\ell}) = \mu_0 IN.$$

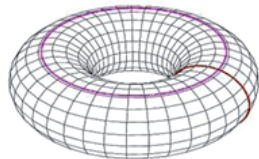


Рис. 32.1. Топ

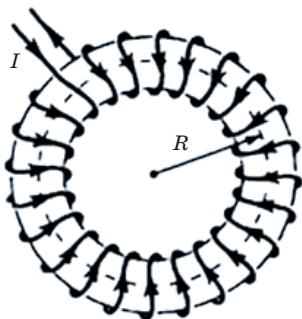


Рис. 32.2. Тороид

Приравниваем друг к другу два полученных выражения и получаем:

$$B = \mu_0 I \frac{N}{\ell}.$$

Вводим термин *плотность намотки витков*, или число витков на единицу длины катушки $n = N/\ell$, и переписываем окончательно:

$$B = \mu_0 I n. \quad (32.1)$$

Соленоидом называется совокупность одинаковых последовательно соединенных витков, равномерно навитых на цилиндрический каркас (рис. 32.3). Рассмотрим бесконечно длинный соленоид с плотностью намотки n . Его можно рассматривать как предельный случай тороида с радиусом, стремящимся к бесконечности.

Посмотрим, как зависит магнитная индукция тороида от его радиуса. Напрямую – не зависит. Если плотность намотки сохраняется постоянной (например, намотка идет плотно виток к витку), то от радиуса тороида R вообще ничего не зависит. *Для бесконечного соленоида магнитная индукция будет такой же, как и для тороида (32.1).*

Мысленно разрежем бесконечно длинный соленоид на две части и рассмотрим магнитную индукцию в месте разреза. Разумеется, она равна значению, определяемому формулой (32.1) $B = \mu_0 I n$. Из чего складывается это значение? По принципу суперпозиции в него дают вклады все витки соленоида. Половину этого значения дают витки слева, половину – витки справа. Если половину витков убрать, как это показано на рис. 32.4, то оставшиеся создадут магнитную индукцию вдвое меньшую, чем по формуле (32.1):

$$B = \frac{\mu_0 I n}{2}. \quad (32.2)$$

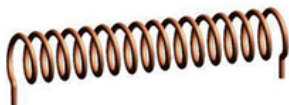


Рис. 32.3. Соленоид

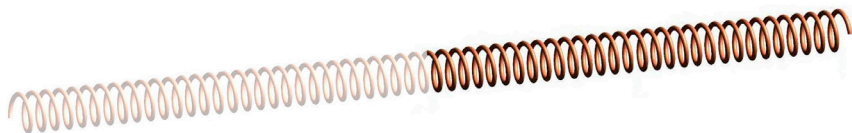


Рис. 32.4. Полубесконечный соленоид

Бесконечно длинных соленоидов не бывает. Полубесконечных тоже не бывает. Бывают длинные соленоиды – это такие, у которых длина много больше диаметра. Магнитная индукция в центре такого соленоида определяется выражением (32.1), а на краю – выражением (32.2).

В центре соленоида: $B = \mu_0 In.$

На краю соленоида: $B = \frac{\mu_0 In}{2}.$

33. Механическая работа в магнитном поле. Магнитный поток

Так как на провод с током в магнитном поле действуют силы, то при движении провода совершается работа. Найдем величину этой работы. Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из источника, двух параллельных проводников – рельсов и переключки, которая может без трения скользить по ним. Вся система находится в однородном магнитном поле, силовые линии которого смотрят «на нас», как это показано на рис. 33.1.

Проводник длиной ℓ , входящий в цепь тока, перемещается поступательно параллельно самому себе на отрезок Δx под действием силы Ампера. Магнитная индукция направлена перпендикулярно проводу и отрезку Δx . Работа, совершенная магнитным полем, равна

$$dA = F_A dx = IB\ell dx = IBdS, \quad (33.1)$$

где dS – площадь, пересеченная проводником при движении.

Рассмотрим другую электрическую цепь, показанную на рис. 33.2, в которой проводник длиной l вращается под действием силы Ампера.

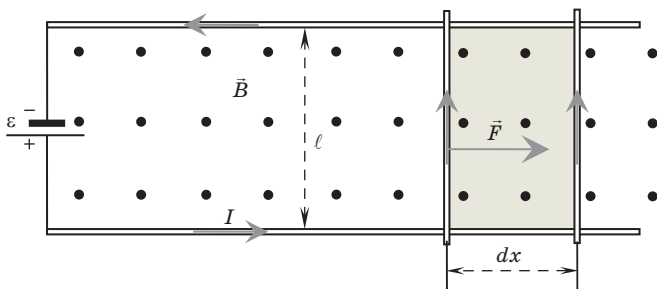


Рис. 33.1. Вычисление механической работы

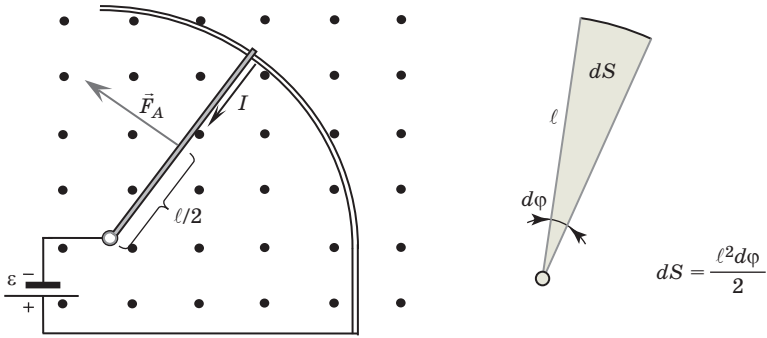


Рис. 33.2. Вычисление работы для вращательного движения проводника

Момент силы Ампера, действующий на проводник, равен произведению силы на плечо:

$$M = F_A b = BI\ell \frac{\ell}{2} = \frac{BI\ell^2}{2}.$$

Работа по вращению абсолютно твердого тела на угол $d\varphi$ равна $dA = M d\varphi$,

$$dA = BI \frac{\ell^2 d\varphi}{2} = BI dS.$$

Для вращательного движения мы снова получили формулу (33.1).

Поскольку любое движение твердого тела сводится к суперпозиции поступательного и вращательного, полученная формула будет верна в случае произвольного движения проводника в магнитном поле.

Введем понятие магнитного потока, подобно тому, как мы это делали в электростатике для вектора \vec{E} .

Рассмотрим плоскую площадку S , находящуюся в магнитном поле с индукцией \vec{B} (рис. 33.3). Построим единичный вектор \vec{n} из ее середины перпендикулярно поверхности и назовем его нормалью. Эту площадку пересекают линии индукции под некоторым углом к поверхности и углом α к нормали. Поток вектора \vec{B} через поверхность S назовем произведение длины вектора на площадь и на косинус угла α .

$$\Phi = BS \cos \alpha = B_n S, \quad (33.2)$$

где B_n – проекция вектора магнитной индукции на направление нормали. Условимся считать S вектором, длина которого равна площади, направление совпадает с вектором нормали: $\vec{S} = S\vec{n}$.

Теперь формулу (33.2) можно переписать в виде скалярного произведения:

$$\Phi = (\vec{B}\vec{S}). \quad (33.3)$$

На рис. 33.4 показаны различные случаи ориентации площадки S во внешнем магнитном поле.

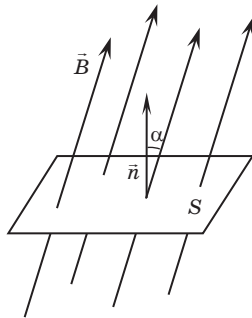


Рис. 33.3. Силовые линии, пересекающие площадку

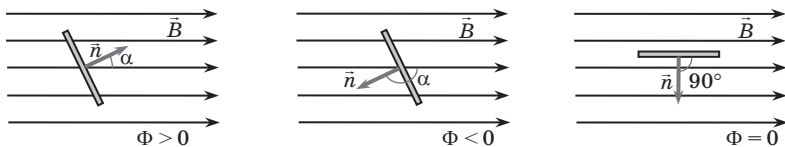


Рис. 33.4. Магнитный поток при разных ориентациях площадки во внешнем поле

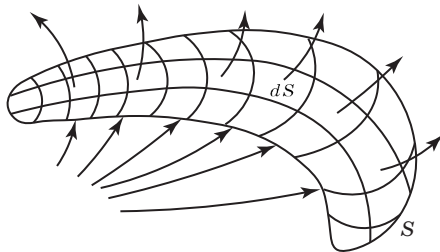


Рис. 33.5. Вычисление потока неоднородного поля через сложную поверхность

В случае, когда магнитное поле неоднородно или поверхность неплоская, формулами (33.2) и (33.3) пользоваться невозможно. В таком случае поверхность разбивают на элементарные области $d\vec{S}$, вычисляют элементарные потоки через каждую такую область, полагая, что в пределах малой области поверхность можно считать плоской, а поле – однородным:

$$d\Phi = (\vec{B}d\vec{S}). \quad (33.4)$$

Полный поток Φ через всю поверхность находится суммированием (интегрированием) всех элементарных потоков:

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{B}d\vec{S}). \quad (33.5)$$

Единицей измерения магнитного потока является вебер.

$$1 \text{ вебер} = 1 \text{ тесла} \cdot 1 \text{ м}^2.$$

Перепишем формулу (33.1) для механической работы:

$$dA = Id\Phi. \quad (33.6)$$

Если проводник совершает конечное перемещение в магнитном поле, то

$$A = I\Delta\Phi. \quad (33.9)$$

В заключение подчеркнем, что в этом параграфе речь идет именно о механической работе, которую совершает, например, электромотор.

34. Теорема Гаусса для вектора \vec{B}

В п. 33 было введено понятие магнитного потока. Задумаемся о смысле этого термина. Представим себе следующую ситуацию. Мы имеем виток с током в магнитном поле. Длина провода может меняться (например, провод – это очень мягкая пружинка). Переместим виток вдоль силовых линий из положения 1 в положение 2, не меняя тока в нем, как это показано на рис. 34.1 (при этом длина витка может немного измениться). Существенно, что каждая силовая линия, пересекавшая виток в положении 1, будет пересекать его и в положении 2.

Поскольку сила Ампера направлена перпендикулярно линиям индукции, а перемещение происходит вдоль этих линий, работа при таком перемещении не совершается:

$$\Delta A = F_{\Delta} \Delta x \cos 90^{\circ} = 0.$$

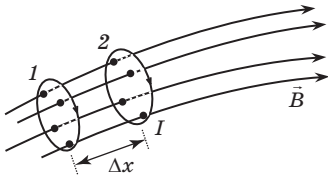


Рис. 34.1. Перемещение витка с током

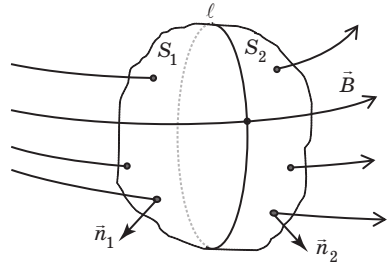


Рис. 34.2. Магнитный поток через замкнутую поверхность

Эту же работу можно вычислить по формуле (33.9):

$$A = I\Delta\Phi.$$

Приравниваем одно к другому и получаем $\Delta\Phi = 0$, т. е. $\Phi_1 = \Phi_2$. Два контура пересекаются одними и теми же силовыми линиями; магнитные потоки равны.

Магнитный поток – это число линий индукции, пересекающих контур.

Рассмотрим замкнутую поверхность S в магнитном поле. Каждая силовая линия пересекает поверхность дважды: входит через левую часть – S_1 и выходит через правую часть – S_2 . Граница ℓ между ними показана на рис. 34.2.

Полный поток через оболочку можно разбить на два: входящий – Φ_1 и выходящий – Φ_2 . Отметим, что силовые линии около границы могут только касаться поверхности S , но не могут ее пересекать. Они дают нулевой вклад в полный поток через оболочку S . Поскольку обе половины оболочки S_1 и S_2 пересекаются одними и теми же линиями индукции, потоки Φ_1 и Φ_2 равны по модулю; но $\Phi_1 < 0$, $\Phi_2 > 0$, поскольку угол между нормалью и вектором \vec{B} для S_2 – острый, а для S_1 – тупой. Значит,

$$\Phi_2 = -\Phi_1; \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0.$$

Магнитный поток через замкнутую поверхность равен нулю. При доказательстве теоремы Гаусса мы опирались на непрерывность магнитных силовых линий, т. е. на отсутствие магнитных зарядов.

Мы доказали теорему Гаусса для вектора \vec{B} :

$$\oint_{(S)} (\vec{B} d\vec{S}) = 0. \quad (34.1)$$

35. Магнитное поле в веществе. Теорема о циркуляции вектора \vec{H}

Если в магнитное поле поместить вещество, то магнитная индукция в нем изменится. Кроме внешнего магнитного поля с индукцией B_0 , появится поле, созданное веществом B' :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (35.1)$$

Это объясняется тем, что всякое вещество является магнетиком, т. е. способно под действием внешнего магнитного поля приобретать дипольный момент, т. е. намагничиваться. Для объяснения намагничивания Ампер выдвинул гипотезу, что в атомах и молекулах вещества циркулируют круговые токи, т. е. все они являются магнитными диполями. При отсутствии внешнего магнитного поля все диполи ориентированы хаотически, и созданное ими результирующее поле B' равно нулю. Дипольный момент вещества тоже равен нулю (вещество не намагничено).

Во внешнем поле B_0 магнитные моменты атомов и молекул имеют выделенное преимущественное направление. При этом вещество намагничивается, т. е. приобретает дипольный момент, и в нем появляется дополнительное магнитное поле B' . Намагничивание вещества характеризуют магнитным моментом единицы объема:

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{P}_m}{\Delta V}, \quad (35.2)$$

где \vec{J} – вектор намагниченности; \vec{P}_m – магнитный момент атома или молекулы; ΔV – элемент объема вещества.

Рассмотрим магнитное поле в длинном соленоиде, заполненном веществом (сердечником). На рис. 35.1 дано сечение этого соленоида. Направление тока I в катушке указано. Этот ток создает в катушке магнитное поле с индукцией \vec{B} , направленной «на нас». Будем считать, что все атомарные дипольные моменты сориентировались по направлению этого магнитного поля, т. е. все атомарные токи текут в одном направлении. На рис. 35.1 – это направление против часовой стрелки¹. Токи внутри вещества компенсируют друг друга,

¹ Направление движения электронов по орбитам, разумеется, противоположное.

а на поверхности – нет. Поэтому по поверхности сердечника в магнитном поле течет ток с линейной плотностью j . Направление этого тока такое же, как и у тока I , текущего по внешнему проводу.

На рис. 35.2 показан тонкий срез сердечника во внешнем магнитном поле. По его боковой поверхности течет ток ΔI :

$$\Delta I = j\Delta\ell. \quad (35.3)$$

Этот ток создает магнитный момент $\Delta\vec{P}_m$.

$$\Delta P_m = \Delta IS = j\Delta\ell S = j\Delta V,$$

где ΔV – объем показанной шайбы. С другой стороны, $\Delta\vec{P}_m$ – это сумма дипольных моментов, созданных всеми атомарными токами. Принимая во внимание формулу (35.2), получаем:

$$J = j. \quad (35.4)$$

Намагниченность вещества численно равна линейной плотности тока, текущего по его поверхности.

Рассмотрим цилиндрический сердечник внутри соленоида (рис. 35.3). По его поверхности течет электрический ток. Выберем

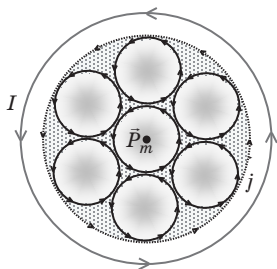


Рис. 35.1. Атомарные токи в магнетике

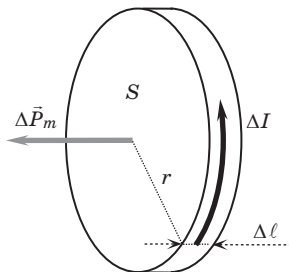


Рис. 35.2. Магнитный момент тонкой шайбы

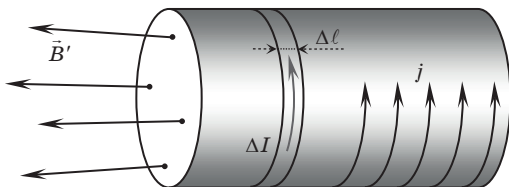


Рис. 35.3. Токи на поверхности магнетика

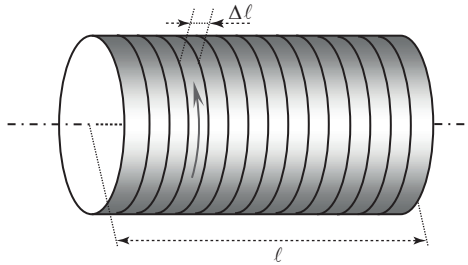


Рис. 35.4. Дополнительные витки тока на поверхности сердечника

поясок шириной Δl , ток по нему $\Delta I = j\Delta l$. Каждый такой поясок можно считать витком тока. Эти дополнительные витки (рис. 35.4) создают магнитную индукцию, которая в формуле (35.1) обозначена символом B' . Очевидна связь числа витков с шириной витка и длиной соленоида:

$$l = N\Delta l. \quad (35.5)$$

Плотность намотки витков n равна

$$n = \frac{N}{l} = \frac{1}{\Delta l}. \quad (35.6)$$

Величину B' – добавку к внешнему магнитному полю внутри магнетика – можно найти как магнитную индукцию бесконечного соленоида по формуле (32.1):

$$B' = \mu_0 \Delta I n = \mu_0 \Delta I / \Delta l = \mu_0 j.$$

$$B' = \mu_0 j. \quad (35.7)$$

Сравнивая формулы (35.4) и (35.7), получаем связь добавочного магнитного поля B' с намагниченностью вещества J :

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}.$$

Магнитная индукция в веществе, таким образом, равна

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}. \quad (35.8)$$

Назовем *напряженностью магнитного поля* отношение индукции внешнего поля к константе μ_0 :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}. \quad (35.9)$$

С учетом этого определения перепишем формулу:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}). \quad (35.10)$$

Намагничивание вещества возникает потому, что оно находится во внешнем магнитном поле. В не очень сильных полях справедливо соотношение

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (35.11)$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества.

Подставляем (35.11) в (35.10) и переписываем:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}. \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu \vec{H}, \end{aligned} \quad (35.12)$$

где $\mu = 1 + \chi$ – магнитная проницаемость среды.

Мы получили формулу связи векторов магнитной индукции \vec{B} и напряженности \vec{H} магнитного поля. Эта связь оказалось точно такой же, как и между векторами \vec{D} и \vec{E} в электростатике.

Сформулируем теорему о циркуляции вектора \vec{B} в магнетике. Учтем, что есть внешнее магнитное поле – \vec{B}_0 – и поле, созданное веществом – \vec{B}' . Соответственно, есть токи, текущие по проводам $I^{\text{пр}}$, и поверхностные токи $I^{\text{пов}}$:

$$\oint_{(l)} (\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 \sum I_i;$$

$$\oint_{(l)} (\vec{B}_0 d\vec{l}) + \oint_{(l)} (\vec{B}' d\vec{l}) = \mu_0 \sum I_i^{\text{пр}} + \underline{\mu_0 \sum I_i^{\text{пов}}}.$$

Магнитное поле \vec{B}' создается поверхностными токами, значит, подчеркнутые члены равны друг другу $\oint_{(l)} (\vec{B}' d\vec{l}) = \mu_0 \sum I_i^{\text{пов}}$. Их можно сократить. Следовательно, циркуляция индукции внешнего магнитного поля равна с точностью до множителя μ_0 сумме всех токов, текущих по проводам:

$$\oint_{(l)} (\vec{B}_0 d\vec{l}) = \mu_0 \sum I_i^{\text{пр}}.$$

Нам удалось исключить из формулы поверхностные токи, которые непонятно, как измерять. Забудем про них и про обозначение

ния «пр» и «пов». Остались только «хорошие», легко измеряемые токи проводимости. Учитывая (35.9), окончательно имеем:

$$\oint_{(l)} (\vec{H} d\vec{l}) = \Sigma I_i. \quad (35.13)$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равна алгебраической сумме всех токов проводимости, охваченных этим контуром.

36. Граничные условия для векторов \vec{B} и \vec{H}

Имеются два магнетика с проницаемостями μ_1 и μ_2 . Силовые линии пересекают границу диэлектриков под некоторым углом. Имеем две теоремы:

- 1) Гаусса для вектора \vec{B} ;
- 2) о циркуляции вектора \vec{H} .

На рис. 36.1 показано сечение двух граничащих магнетиков для случая $\mu_1 < \mu_2$. Рассмотрим замкнутую поверхность, охватывающую площадку ΔS , на границе диэлектриков. Выберем эту поверхность состоящей из трех частей – левой, правой и боковой. Будем считать, что левая ΔS_1 и правая ΔS_2 поверхности расположены

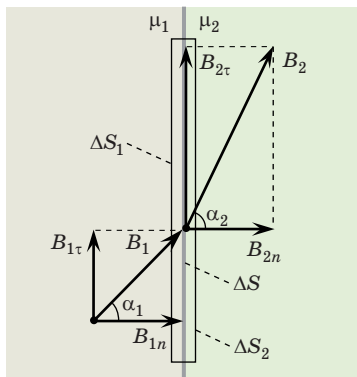


Рис. 36.1. Поток вектора \vec{B} через границу диэлектриков

очень близко к границе. Площадь боковой поверхности в таком случае можно пренебречь.

Считаем элемент границы ΔS настолько малым, что магнитное поле по обе стороны от него можно считать однородным. Поток через левую ΔS_1 и правую ΔS_2 границы в таком случае находятся по формулам:

$$\Phi_{B1} = \int_{\Delta S_1} (\vec{B}_1 d\vec{S}_1) = (\vec{B}_1 \Delta \vec{S}_1) = -B_1 \Delta S \cos \alpha_1 = -B_{1n} \Delta S;$$

$$\Phi_{B2} = \int_{\Delta S_2} (\vec{B}_2 d\vec{S}_2) = (\vec{B}_2 \Delta \vec{S}_2) = B_2 \Delta S \cos \alpha_2 = B_{2n} \Delta S.$$

Поток через боковую поверхность стремится к нулю: $\Phi_{B_{\text{бок}}} = 0$.

Первый поток оказался отрицательным из-за того, что нормаль к поверхности ΔS_1 направлена наружу, т. е. справа налево.

Полный поток через всю замкнутую поверхность равен сумме трех написанных потоков, а, по теореме Гаусса, для вектора \vec{B} он равен нулю, поскольку по границе магнетиков не текут токи. Таким образом, имеем:

$$0 = \Phi_{B1} + \Phi_{B2} = -B_{1n} \Delta S + B_{2n} \Delta S = (B_{2n} - B_{1n}) \Delta S;$$

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (36.1)$$

Нормальная составляющая вектора магнитной индукции сохраняется при пересечении границы магнетиков.

Учтем связь (35.12) векторов индукции и напряженности магнитного поля и перепишем условие (36.1) для вектора \vec{H} :

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}. \quad (36.2)$$

На рис. 36.2 показано сечение двух граничащих магнетиков для случая $\mu_1 < \mu_2$. Рассмотрим замкнутый контур, охватывающий участок границы длиной $\Delta \ell$. Направление обхода показано на рис. 36.2 стрелкой. Этот контур состоит из трех частей – левой, правой и боковой. Будем считать, что левый $\Delta \ell_1$ и правый $\Delta \ell_2$ участки контура расположены очень близко к границе. Поэтому длиной боковой части можно пренебречь.

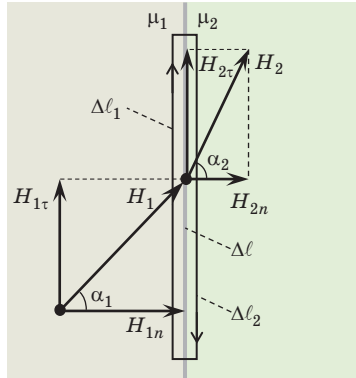


Рис. 36.2. Циркуляция вектора \vec{H} на границе диэлектриков

Считаем элемент границы Δl настолько малым, что магнитное поле по обе стороны от него можно считать однородным. Найдем циркуляцию вектора \vec{H} на показанном контуре:

$$\oint_{(\ell)} (\vec{H} d\vec{\ell}) = \int_{(\ell_1)} (\vec{H}_1 d\vec{\ell}) + \int_{(\ell_2)} (\vec{H}_2 d\vec{\ell}) + \int_{(\ell_{\text{бок}})} (\vec{H} d\vec{\ell}) = \dots$$

Третий интеграл равен нулю, поскольку область интегрирования стремится к нулю.

$$\dots = (\vec{H}_1 \Delta \vec{\ell}_1) + (\vec{H}_2 \Delta \vec{\ell}_2) = H_1 \sin \alpha_1 \Delta l - H_2 \sin \alpha_2 \Delta l = \dots$$

Знак «минус» связан с тем, что угол между направлениями \vec{H}_2 и $\Delta \vec{\ell}_2$ больше 90° .

$$\dots = H_{1\tau} \Delta l - H_{2\tau} \Delta l = (H_{1\tau} - H_{2\tau}) \Delta l = 0.$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (36.3)$$

Тангенциальная составляющая вектора напряженности магнитного поля сохраняется при пересечении границы диэлектриков.

Учтем связь (35.12) векторов индукции и напряженности магнитного поля и перепишем условие (36.3) для вектора \vec{B} :

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2}. \quad (36.4)$$

37. Виды магнетиков

Все вещества изменяют магнитное поле, т. е. все являются *магнетиками*. Существенно, что магнетики могут как увеличивать, так и уменьшать внешнее магнитное поле. Виды магнетиков и их типичные значения магнитной проницаемости (магнитной восприимчивости) приведены в табл. 37.1.

Рассмотрим три явления: диа-, пара- и ферромагнетизм, которые определяют свойства соответствующих классов магнетиков.

Диамагнетизм: $\mu < 1$, $\chi \sim -(10^{-6} - 10^{-4})$.

Электрон в атоме вращается вокруг ядра и создает *атомарный ток* и *атомарный магнитный момент*. Оказавшись во внешнем магнитном поле, электрон, помимо названного вращения, будет совершать еще одно вращение – вокруг направления линии напряженности магнитного поля. Второе вращение проявляется в *прецессии электронной орбиты*¹. При этом всегда возникает магнитный дипольный момент, направленный против вектора \vec{H} . Внешнее магнитное поле ослабляется.

Покажем этот эффект для случая, когда магнитный момент атома направлен вдоль вектора напряженности магнитного поля (именно такое направление стремится принять магнитный диполь во внешнем поле). На рис. 37.1 показано направление силы Кулона и силы Лоренца, действующих на электрон в атоме во внешнем магнитном поле.

Видно, что $\vec{F}_K \uparrow \downarrow \vec{F}_L$. Результирующая сила, действующая на электрон, становится меньше, а с ней вместе – и скорость движения электрона по орбите. Все это приводит к уменьшению магнитного момента электрона или к появлению еще одного магнитного момента \vec{P}'_m ,

Таблица 37.1

Виды магнетиков и их свойства

Вид магнетика	$\mu - 1$
Диамагнетик	$-(10^{-6} - 10^{-4})$
Парамагнетик	$(10^{-5} - 10^{-3})$
Ферромагнетик	~ 100

¹ Вращение плоскости электронной орбиты вокруг направления вектора магнитной индукции. Аналогичное движение вокруг направления вектора \vec{g} совершает волчок, ось вращения которого не вертикальна.

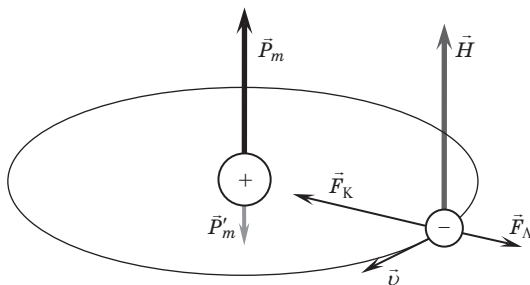


Рис. 37.1. Силы, действующие на связанный электрон во внешнем магнитном поле

связанного с действием магнитного поля. В результате *внешнее магнитное поле ослабляется*. К такому же результату можно прийти в случае любой взаимной ориентации векторов \vec{P}'_m и \vec{H} .

Во всех атомах, кроме атома водорода, несколько электронов. Отмеченный эффект суммируется от всех электронов атома вне зависимости от взаимной ориентации электронных орбит. Чем больше электронов в атоме, тем больше эффект. Даже в случае, когда полный магнитный момент всей электронной оболочки равен нулю, эффект есть¹. Мало того, только в этих случаях диамагнетизм наблюдается². В остальных случаях он перебивается значительно более сильным эффектом – *парамагнетизмом*.

На рис. 37.2 показано поведение диамагнетиков в поле постоянного магнита. В обоих случаях диамагнетик выталкивается из магнитного поля.

На рис. 37.2, *а* диамагнитная палочка поворачивается поперек силовых линий, а на рис. 37.2, *б* пламя свечи выталкивается из сильного магнитного поля.

В заключение отметим особенности диамагнетизма:

- магнитное поле ослабляется веществом;
- эффект *очень* мал;
- у эффекта нет насыщения;
- диамагнитная восприимчивость примерно пропорциональна плотности магнетика (точнее говоря, она зависит от числа электронов в атоме, т. е. от порядкового номера химического элемента).

¹ Магнитный момент электронной оболочки равен нулю, если она заполнена, т. е. все электроны в ней спаренные.

² Диамагнетиками являются все инертные газы и щелочно-земельные и некоторые другие элементы.

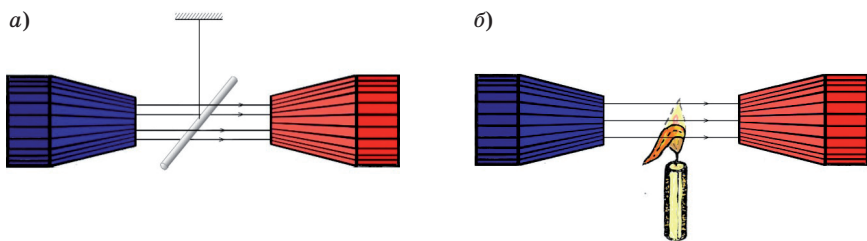


Рис. 37.2. Выталкивание диамагнетиков из магнитного поля.
Пояснения даны в тексте

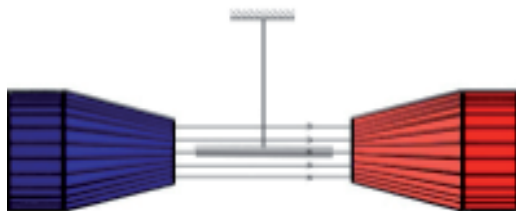


Рис. 37.3. Затыгивание парамагнетика в магнитное поле

Парамагнетизм: $\mu > 1$, $\chi \sim + (10^{-5} - 10^{-3})$.

Электрон в атоме вращается вокруг ядра и создает *атомарный ток* и *атомарный магнитный момент*. Во внешнем магнитном поле этот момент стремится повернуться вдоль магнитной силовой линии и тем самым усилить внешнее магнитное поле. Рассуждения о намагничиваемости вещества, приводимые ранее, относятся, в первую очередь, к парамагнетикам. На рис. 37.3 показано поведение парамагнетиков в поле постоянного магнита. Видно, что парамагнетик затыгивается в магнитное поле (парамагнитная палочка намагничивается и поворачивается вдоль силовых линий).

Парамагнитная постоянная зависит от температуры:

$$\chi \sim \frac{P_m^2}{T}, \quad (37.1)$$

где P_m – магнитный момент атома; T – абсолютная температура.

В слабых полях (реально, практически всегда) парамагнитная восприимчивость пропорциональна напряженности магнитного поля. В очень сильных полях или при очень низких температурах наблюдается насыщение. Когда все атомы повернулись вдоль силовых

линий, интенсивность намагничивания не зависит от напряженности магнитного поля.

В заключение отметим особенности парамагнетизма:

- магнитное поле усиливается веществом;
- эффект *очень* мал;
- у эффекта есть насыщение;
- парамагнитная восприимчивость вещества зависит от температуры и от магнитного момента атома.

Ферромагнетизм: $\mu \sim 100$.

Особый класс магнетиков составляют вещества, сохраняющие намагниченность в отсутствие внешнего магнитного поля. По самому известному элементу, железу, они названы ферромагнетиками. К ферромагнетикам относятся железо, кобальт, никель, гадолиний и некоторые сплавы марганца и хрома. На рис. 37.4 показана кривая намагничивания железа, которое до того не было намагничено.

Намагниченность ферромагнетиков нелинейно зависит от напряженности поля. Эта зависимость имеет насыщение при напряженности поля больше 100 А/м. Поскольку $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$, магнитная индукция после насыщения продолжает расти вместе с напряженностью поля (рис. 37.5).

Кроме нелинейной зависимости B от H для ферромагнетиков характерно явление *гистерезиса*. Если увеличить напряженность магнитного поля по линии 0–1 так, чтобы намагниченность достигла насыщения, а потом уменьшать напряженность магнитно-

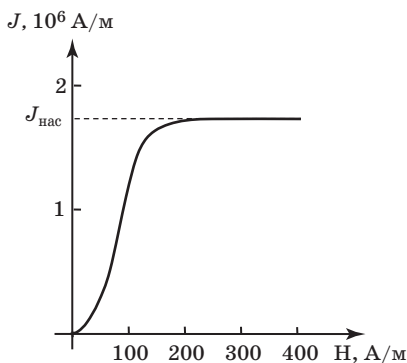


Рис. 37.4. Намагниченность железа как функция напряженности магнитного поля

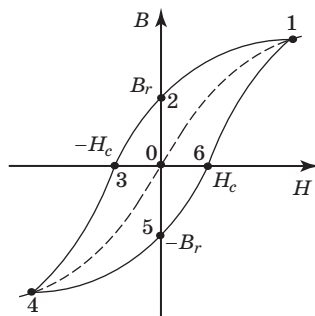


Рис. 37.5. Кривая намагничивания ферромагнетика

го поля, то индукция меняется не по первоначальной кривой 1–0, а по 1–2. В результате, при $H = 0$ намагниченность не спадает до нуля, имеется остаточная индукция B_r . Индукция обращается в нуль лишь под действием напряженности поля H_c – коэрцитивной силы. В переменном магнитном поле зависимость B от H описывается циклом 1–2–3–4–5–6–1; наблюдается петля гистерезиса.

Остаточная намагниченность объясняет существование *постоянных магнитов*.

В основе классической теории ферромагнетизма¹ лежат две гипотезы.

1. В определенной области температур (от нуля до температуры Кюри) ферромагнетики обладают самопроизвольной намагниченностью.

Однако при отсутствии магнитного поля ферромагнетик может быть размагничен. Это заставило ввести вторую гипотезу.

2. Ниже температуры Кюри любое ферромагнитное тело разбивается на малые области, обладающие спонтанной (самопроизвольной) намагниченностью.

Такие области называются *доменами*. Их линейные размеры 10^{-5} – 10^{-4} м.

При отсутствии внешнего магнитного поля векторы магнитных моментов отдельных доменов ориентированы в пространстве хаотически, и результирующий магнитный момент всего тела равен нулю. Внешнее магнитное поле, действующее на ферромагнетик, ориентирует магнитные моменты не отдельных частиц, как у парамагнетиков, а целых доменов.

Для каждого ферромагнетика имеется своя температура, при которой области спонтанного намагничивания распадаются и вещество утрачивает ферромагнитные свойства. Эта температура называется *точкой Кюри*. При температуре выше точки Кюри ферромагнетик становится парамагнетиком, магнитная восприимчивость которого подчиняется закону Кюри – Вейса:

$$\chi = \frac{\gamma}{T - T_c}. \quad (37.2)$$

¹ Теория создана П. Вейсом.

38. Электромагнитная индукция. Закон Фарадея. Напряжение на концах провода в магнитном поле

Пусть имеется электрическая цепь с током в магнитном поле. Источник тока расходует электроэнергию на выделение тепла в проводах и на совершение механической работы:

$$P_{\text{ист}} dt = dA + dQ; \quad \varepsilon I dt = I d\Phi + I^2 (R + r) dt;$$

$$\varepsilon dt = d\Phi + I(R + r) dt; \quad \varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} + I(R + r);$$

$$\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt} = I(R + r).$$

Получился закон Ома для замкнутой цепи с источником. Видно, что, кроме ЭДС источника, появляется еще один член, который называется *ЭДС индукции*:

$$\varepsilon + \varepsilon_i = I(R + r);$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (38.1)$$

Последняя формула называется *законом электромагнитной индукции Фарадея*. Если электрическая цепь представляет собой катушку с N витками, то ЭДС индукции во всех последовательных витках складываются:

$$\varepsilon_i = -\sum \frac{d\Phi_k}{dt} = -\frac{d\sum \Phi_k}{dt}.$$

Введем физическую величину *потокосцепление*, равную сумме магнитных потоков через все N витков катушки:

$$\Psi = \sum \Phi_k. \quad (38.2)$$

В простейшем случае, когда магнитное поле однородное, а витки одинаковые,

$$\Psi = N\Phi. \quad (38.2.1)$$

Более общая формулировка закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (38.3)$$

Знак «минус» в этой формуле согласуется с правилом Ленца, которое определяет направление индукционного тока в замкнутом контуре.

Правило Ленца:

индукционный ток в контуре течет в таком направлении, чтобы создаваемый им магнитный поток препятствовал изменению внешнего магнитного поля.

Важно понимать, что ЭДС индукции возникает не только при механическом движении провода во внешнем поле. Любое изменение магнитного потока, будь то изменение внешнего магнитного поля, поворот или деформация рамки с током, приводят к одному и тому же результату – к возникновению ЭДС индукции.

Выберем простейший случай, когда магнитное поле однородное, а направления провода, скорости \vec{v} и вектора \vec{B} взаимно перпендикулярны. Этот случай показан на рис. 38.1, а.

На положительный заряд действует сила Лоренца $F_{\Lambda} = qvB$, направленная «на нас». Вследствие этого ближний конец проводника заряжается положительно, дальний – отрицательно. В проводнике возникает электрическое поле, направленное от плюса к минусу. Оно действует на заряд в проводнике с силой $F_{\text{К}} = qE$. При некоторой разности потенциалов между концами проводника силы Лоренца и Кулона, действующие на заряд в проводнике, уравновесят друг друга. Заряды перестанут перемещаться к концам проводника:

$$F_{\Lambda} = F_{\text{К}}; \quad qvB = qE; \quad E = vB.$$

Напряженность электрического поля E связана с длиной проводника l и напряжением на его концах U соотношением $U = El$.

Поэтому
$$U = Bv\ell. \quad (38.4)$$

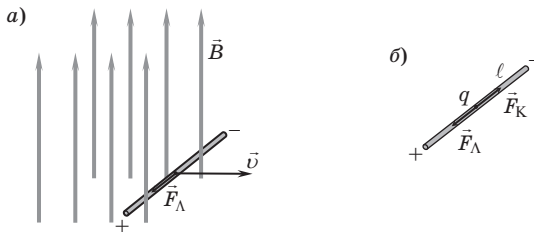


Рис. 38.1. Проводник в магнитном поле (а); силы, действующие на электрический заряд (б)

При движении проводника в магнитном поле на его концах возникает разность потенциалов.

В общем случае, когда углы между тремя векторами произвольные, в формуле (38.4) будет *смешанное произведение векторов*.

$$U = \left(\vec{B} \left[\vec{v} \vec{\ell} \right] \right). \quad (38.4.1)$$

Если два из трех углов между направлениями \vec{B} , \vec{v} и $\vec{\ell}$ прямые, а третий (любой из трех) произвольный – α , то

$$U = Bv\ell \sin \alpha. \quad (38.4.2)$$

39. Самоиндукция

Пусть имеется электрическая цепь с током в магнитном поле. Цепь замкнута, значит, провод образует петлю. Магнитное поле, созданное протекающим током, создает магнитный поток. Еще раз подчеркнем, что этот магнитный поток связан не с внешним полем, а с полем, созданным электрическим током в цепи. Если ток в цепи изменить, то изменится магнитное поле и магнитный поток, а значит, в цепи возникнет ЭДС индукции.

Изменение тока в цепи приводит к ответному отклику этой цепи. Такой ответ электрической цепи на изменение тока в ней называется *самоиндукцией*. Направление индукционного тока определяется правилом Ленца.

Магнитная индукция от провода с током в любой точке, по закону Био – Савара – Лапласа (24.1) и принципу суперпозиции (24.3), пропорциональна току, текущему по проводнику. Магнитный поток, пронизывающий контур, пропорционален магнитной индукции, а значит, току, текущему в цепи. Следовательно, магнитный поток пропорционален току в цепи:

$$\Phi = LI. \quad (39.1)$$

Если цепь содержит несколько витков провода, то эта формула переписывается в виде:

$$\Psi = LI. \quad (39.2)$$

Таким образом, для ЭДС самоиндукции справедлива формула

$$\varepsilon_i = -L \frac{dI}{dt}. \quad (39.3)$$

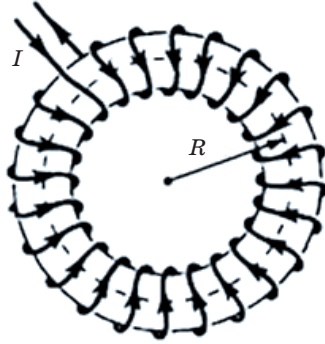


Рис. 39.1. Торойд

Коэффициент пропорциональности в обеих формулах L называется *индуктивностью* контура. Единицей измерения индуктивности в Международной системе единиц является генри (Гн):

генри = вебер/ампер.

Найдем индуктивность катушки – торойда, изображенного на рис. 32.2. На торойд длиной $\ell = 2\pi R$ намотано N витков провода, по которому течет ток I . Магнитная индукция этой катушки, согласно формуле (32.1), равна

$$B = \mu_0 I n, \quad (39.4)$$

где $n = N/\ell$ – плотность намотки провода. Магнитный поток через каждый виток равен

$$\Phi = BS = \mu_0 n IS.$$

Потоко сцепление всего контура в N раз больше, чем магнитный поток через каждый виток:

$$\Psi = N\Phi = \mu_0 n^2 I \ell S = \mu_0 n^2 IV = LI.$$

$$L = \mu_0 n^2 V, \quad (39.5)$$

где V – объем внутри катушки.

40. Взаимная индукция

Пусть имеются два электрических контура, расположенных неподалеку друг от друга (рис. 40.1). В первом контуре течет ток I_1 . Этот ток создает магнитное поле и, как следствие, магнитный поток

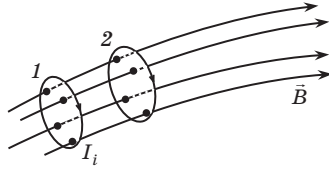


Рис. 40.1. Возникновение взаимной индукции

через второй контур¹. Если изменить этот ток, то во втором контуре возникнет ЭДС индукции и индукционный ток.

На изменение тока в первом контуре цепь откликается изменением тока во втором. Это явление называется взаимной индукцией.

Магнитная индукция от провода с током I_1 в любой точке, по закону Био – Савара – Лапласа (24.1) и принципу суперпозиции (24.3), пропорциональна току, текущему по проводнику. Магнитный поток, пронизывающий контур, пропорционален магнитной индукции, а значит, току, текущему в цепи. Следовательно, магнитный поток пропорционален току в цепи:

$$\Phi_2 = L_{21}I_1. \quad (40.1)$$

Если цепь содержит несколько витков провода, то эта формула переписывается в виде:

$$\Psi_2 = L_{21}I_1. \quad (40.2)$$

Таким образом, для ЭДС взаимной индукции справедлива формула

$$\varepsilon_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (40.3)$$

Коэффициент пропорциональности в этой формуле называется *коэффициентом взаимной индукции*, или *взаимной индуктивностью*.

Найдем коэффициент взаимной индукции для тороида с двумя обмотками на общем сердечнике. На рис. 40.2 показан такой тороид. На катушке длиной $\ell = 2\pi R$ имеются две независимые обмотки: N_1 витков провода в первой обмотке и N_2 витков – во второй.

¹ По второму контуру может протекать собственный ток I_2 и создавать собственный магнитный поток, но сейчас речь идет не о нем.

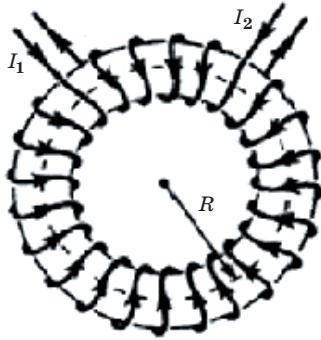


Рис. 40.2. Торойд с двумя обмотками

Считаем, что обе обмотки равномерно намотаны по всей длине тороида и плотности намоток, соответственно, равны:

$$n_1 = \frac{N_1}{\ell_1}, \quad n_2 = \frac{N_2}{\ell_2}.$$

По первой обмотке течет ток I_1 и создает в ней магнитную индукцию

$$B_1 = \mu_0 I_1 n_1. \quad (40.4)$$

Магнитный поток, сцепленный с каждым витком первой катушки, равен

$$\Phi_1 = B_1 S = \mu_0 I_1 n_1 S,$$

где S – площадь сечения витка. Поскольку обе катушки намотаны на один и тот же сердечник, магнитный поток у них будет общий. Потокосцепление для второй обмотки, соответственно, будет равно

$$\Psi_2 = N_2 \Phi_2 = N_2 \Phi_1 = \Phi_1 n_2 \ell = \mu_0 I_1 n_1 n_2 \ell S = \mu_0 n_1 n_2 V I_1 = L_{21} I_1.$$

$$L_{21} = \mu_0 n_1 n_2 V, \quad (40.5)$$

где V – объем катушки. Коэффициент взаимной индукции двух обмоток тороида зависит от обеих плотностей намоток и от объема катушки.

Из анализа формулы в данном случае очевидно, что

$$L_{21} = L_{12}. \quad (40.6)$$

Этот вывод оказывается справедливым для любых контуров с токами.

41. Энергия катушки индуктивности с током

Рассмотрим электрическую цепь, показанную на рис. 41.1, состоящую из источника, ключа, катушки индуктивности и двух одинаковых резисторов $R_1 = R_2 = R$. Пусть в начальный момент времени ключ находится в положении 1 и в цепи течет постоянный ток I_0 .

При очень быстром перебрасывании ключа из положения 1 в положение 2 ток в катушке вследствие явления самоиндукции не может мгновенно прекратиться. Поскольку электрическое сопротивление цепи остается прежним ($R_1 = R_2$), ток в цепи в первый момент тоже сохранится $I(t=0) = I_0$.

С этого момента времени источник питания в схеме отключен, работает только правая часть цепи. Источником становится катушка индуктивности, в которой возникает ЭДС самоиндукции.

$$\varepsilon_i = IR_2; \quad -L \frac{dI}{dt} = IR.$$

Домножаем обе части равенства на $I dt$:

$$-LI dI = I^2 R dt.$$

Интегрируем правую часть по времени от 0 до ∞ и получаем количество тепла, выделившегося в резисторе. Левую часть интегрируем по току от начального значения I_0 до конечного $I = 0$.

$$-\int_{I_0}^0 LI dI = \int_0^{\infty} I^2 R dt; \quad -\frac{LI^2}{2} \Big|_{I_0}^0 = Q; \quad \frac{LI_0^2}{2} = Q.$$

После размыкания ключа в резисторе 2 выделилось некоторое количество теплоты. Откуда оно взялось? В тепло превратилась

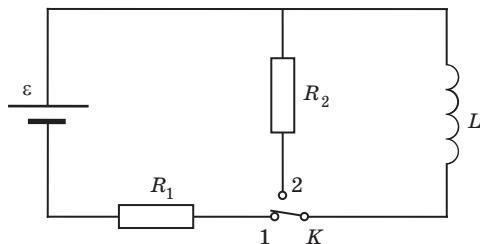


Рис. 41.1. Электрическая цепь с катушкой индуктивности

энергия магнитного поля, запасенная в катушке. Таким образом, энергия катушки с током равна

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (41.1)$$

Можно показать, что в схеме с двумя связанными контурами энергия магнитного поля определяется формулой

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{L_{21} I_2 I_1}{2} + \frac{L_{12} I_1 I_2}{2}. \quad (41.2)$$

Для системы N связанных друг с другом контуров аналогично получается

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N L_{ik} I_i I_k, \quad (41.3)$$

где $L_{ik} = L_{ki}$ – взаимная индуктивность i -го и k -го контуров; L_{ii} – индуктивность i -го контура.

42. Энергия магнитного поля

Рассмотрим длинный соленоид или тороид длиной l , состоящий из N витков. По катушке течет электрический ток. Энергия магнитного поля, запасенная в этой катушке, равна

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Учитывая формулу (39.2), перепишем ее:

$$W = \frac{\Psi I}{2}. \quad (42.1)$$

Индукция магнитного поля в соленоиде (в тороиде) с током I и плотностью намотки провода n равна

$$B = \mu\mu_0 I n.$$

Учитывая связь индукции и напряженности магнитного поля, переписываем:

$$H = I n;$$

$$I = \frac{H}{n}. \quad (42.2)$$

Выразим потокосцепление Ψ через магнитную индукцию, площадь витка S и число витков в катушке N , длину катушки l и ее объем V .

$$\Psi = \Phi N = BS n \ell = B n V. \quad (42.3)$$

Подставляем (42.2) и (42.3) в формулу (42.1):

$$W = \frac{1}{2} \frac{H}{n} B n V = \frac{1}{2} B H V;$$

$$W = \frac{B H}{2} V. \quad (42.4)$$

Оказывается, что энергия катушки пропорциональна ее объему. Это говорит о том, что энергия сосредоточена не на электрических проводах, а в пространстве внутри катушки.

Введем величину – объемную плотность энергии:

$$w = \frac{dW}{dV}. \quad (42.5)$$

Объемная плотность энергии магнитного поля равна

$$w = \frac{B H}{2}. \quad (42.6)$$

Эту формулу можно записать по-другому, используя связь напряженности и индукции магнитного поля $B = \mu \mu_0 H$ (35.12):

$$w = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}; \quad (42.6.1)$$

$$w = \frac{B^2}{2 \mu \mu_0}. \quad (42.6.2)$$

Если в пространстве имеется магнитное поле, то с ним обязательно связана некоторая энергия, объемная плотность которой находится по формулам (42.6), (42.6.1) или (42.6.2).

Формулы (42.6), (42.6.1), (42.6.2) получены для однородного поля, но они оказываются верными для магнитного поля любой конфигурации.

43. Уравнения Максвелла

Вспомним теоремы для электрического и магнитного полей.

1. Теорема о циркуляции вектора \vec{E} в вакууме или в среде (2.12):

$$\oint_{(l)} (\vec{E} d\vec{l}) = 0.$$

Если контур интегрирования l совпадает с электрической цепью, а символом \vec{E} обозначена напряженность любых сил (электрических и сторонних), действующих на заряд q , то циркуляция вектора равна не нулю, а ЭДС источника тока (21.10):

$$\oint_{(l)} (\vec{E} d\vec{l}) = \varepsilon.$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея (38.1) говорит о том, что, кроме ЭДС источника, есть еще ЭДС индукции:

$$\oint_{(l)} (\vec{E} d\vec{l}) = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ – магнитный поток, пронизывающий контур l . Учитывая (33.5) –

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{B} d\vec{S}),$$

получаем первое уравнение Максвелла:

$$\oint_{(l)} (\vec{E} d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \int_{(S)} (\vec{B} d\vec{S}). \quad (43.1)$$

Интеграл в правой части берется по площади контура, а в левой части – по границе этой площади.

Электрическое поле в этом уравнении является *вихревым*. Это значит, что силовые линии не начинаются и не заканчиваются на зарядах, а замкнуты сами на себя.

2. Теорема о циркуляции вектора \vec{H} (35.13):

$$\oint_{(l)} (\vec{H} d\vec{l}) = \Sigma I_i.$$

Если токи, охваченные контуром ℓ , текут не по проводам, а в сплошной среде, пересекая площадь, ограниченную этим контуром, то, учитывая (17.8), имеем:

$$\oint_{(\ell)} (\vec{H} d\vec{\ell}) = \int_{(S)} (\vec{j} d\vec{S}).$$

Дж. Максвелл первым обратил внимание на то, что существует два вида токов: обыкновенный ток – ток проводимости, и так называемый *ток смещения*. Разберемся, что представляет собой последний из них. Для этого рассмотрим электрическую схему, приведенную на рис. 43.1.

При замыкании ключа в ней возникает электрический ток, который заряжает верхнюю обкладку конденсатора положительно, а нижнюю – отрицательно. Этот ток не постоянный, по мере зарядки конденсатора он уменьшается. Вопрос в том, почему он вообще течет, когда на пути движущихся зарядов есть разрыв цепи – конденсатор.

Через разрыв заряды, конечно же, не идут. Но положительные заряды идут с клеммы источника «плюс» на верхнюю обкладку конденсатора, с клеммы «минус» – на нижнюю. Ток через конденсатор не идет, но на обкладках заряды накапливаются.

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\sigma S}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} S,$$

где σ – поверхностная плотность заряда. Она связана с напряженностью и с индукцией электрического поля в конденсаторе $\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E = D$.

Таким образом,
$$\frac{dq}{dt} = \frac{dD}{dt} S.$$

Величина, стоящая в левой части равенства, имеет размерность и смысл электрического тока, связанного со смещением (накопле-

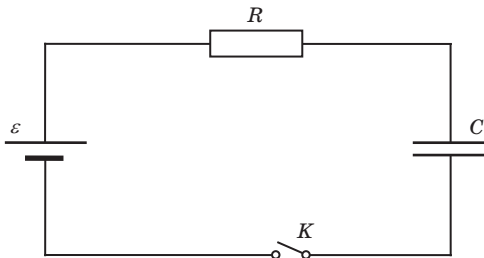


Рис. 43.1. Возникновение тока смещения в конденсаторе

нием) электрических зарядов. Производная, стоящая справа, имеет смысл плотности этого тока.

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Обыкновенный ток, ток проводимости, нагревает проводник и создает магнитное поле вокруг него. Ток смещения теплового действия не имеет. Он только создает магнитное поле.

Мы получили выражение для плотности *тока смещения*, который тоже присутствует во втором уравнении Максвелла.

$$\begin{aligned} \oint_{(l)} (\vec{H} d\vec{l}) &= \int_{(S)} \left((\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) d\vec{S} \right); \\ \oint_{(l)} (\vec{H} d\vec{l}) &= \int_{(S)} \left(\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \right); \\ \oint_{(l)} (\vec{H} d\vec{l}) &= \int_{(S)} (\vec{j} d\vec{S}) + \frac{d}{dt} \int_{(S)} (\vec{D} d\vec{S}). \end{aligned} \quad (43.2)$$

Интеграл в правой части берется по площади, а в левой части — по границе этой площади. Формула (43.2) является *вторым уравнением Максвелла*.

3. Теорема Гаусса для вектора \vec{D} (11.2):

$$\oint_{(S)} (\vec{D} d\vec{S}) = \sum q_i^{\text{своб}}.$$

Поток вектора \vec{D} через замкнутую поверхность равен сумме всех свободных зарядов, оказавшихся внутри нее. Если эти заряды распределены непрерывно по объему внутри этой замкнутой поверхности, то сумма заменяется интегралом от плотности зарядов по объему:

$$\oint_{(S)} (\vec{D} d\vec{S}) = \int_{(V)} \rho dV. \quad (43.3)$$

Левый интеграл берется по границе области, интеграл справа — по объему внутри этой границы. Формула (43.3) является *третьим уравнением Максвелла*.

4. Теорема Гаусса для вектора \vec{B} (34.1):

$$\oint_{(S)} (\vec{B} d\vec{S}) = 0 \quad (43.4)$$

является *четвертым уравнением Максвелла*.

Мы получили четыре уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \oint_{(l)} (\vec{E} d\vec{l}) &= -\frac{d}{dt} \int_{(S)} (\vec{B} d\vec{S}); \\ \oint_{(l)} (\vec{H} d\vec{l}) &= \int_{(S)} (\vec{j} d\vec{S}) + \frac{d}{dt} \int_{(S)} (\vec{D} d\vec{S}); \\ \oint_{(S)} (\vec{D} d\vec{S}) &= \int_{(V)} \rho dV; \\ \oint_{(S)} (\vec{B} d\vec{S}) &= 0. \end{aligned}$$

К ним следует добавить материальные соотношения (10.9) и (35.12):

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H} \end{aligned}$$

и закон Ома в дифференциальной форме, связывающий плотность тока, напряженность электрического поля и удельную проводимость среды:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Все эти уравнения в совокупности образуют *систему уравнений Максвелла*.

44. Некоторые следствия из уравнений Максвелла

В системе уравнений Максвелла в компактной форме содержатся все законы для электрических и магнитных полей. Покажем это на двух примерах.

1. Закон Кулона как следствие третьего уравнения Максвелла.

Пусть в центре сферической оболочки радиусом r находится точечный заряд q . Поле этого заряда должно быть сферически симметричным, значит, на поверхности сферы напряженность должна быть всюду одинаковой по величине и иметь направление либо от центра, либо к центру. Надо выбрать одно из двух направлений. Будем считать, что заряд положительный, т. е. напряженность направлена из сферы наружу.

Напишем третье уравнение Максвелла с учетом соотношения $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$:

$$\varepsilon \varepsilon_0 \oint_{(S)} (\vec{E} d\vec{S}) = \int_{(V)} \rho dV.$$

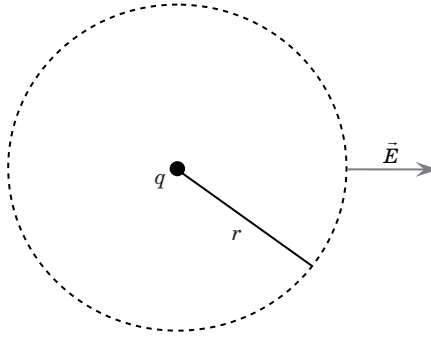


Рис. 44.1. Сферическая оболочка с зарядом в центре

Учтем, что интеграл справа равен заряду q , $\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{S}$, $E - \text{const}$.

$$q = \epsilon\epsilon_0 \oint_{(S)} E dS = \epsilon\epsilon_0 E \oint_{(S)} dS = \epsilon\epsilon_0 E S_{\text{сф}} = \epsilon\epsilon_0 E \cdot 4\pi r^2;$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Получилось выражение для напряженности кулоновского поля.

2. Магнитная индукция от бесконечного прямого провода как следствие второго уравнения Максвелла.

Возьмем бесконечно длинный прямой провод с током I . Контуром обхода будет окружность, перпендикулярная проводу с центром в этом проводе. Ток смещения в этом случае не возникает, поэтому соответствующего слагаемого во втором уравнении Максвелла не пишем. Интеграл в правой части равен току

$$\oint_{(\ell)} (\vec{H} d\vec{\ell}) = \int_{(S)} (\vec{j} d\vec{S}) = I.$$

Направление обхода контура свяжем с направлением тока по правилу буравчика. В таком случае векторы $d\vec{\ell}$ и \vec{H} будут иметь одно направление. Их скалярное произведение равно произведению их длин: $(\vec{H} d\vec{\ell}) = H d\ell$. Кроме того, очевидно, что длина вектора \vec{H} в любой точке окружности одинаковая.

$$I = \oint_{(\ell)} (\vec{H} d\vec{\ell}) = \oint_{(\ell)} H d\ell = H \oint_{(\ell)} d\ell = H \cdot 2\pi r.$$

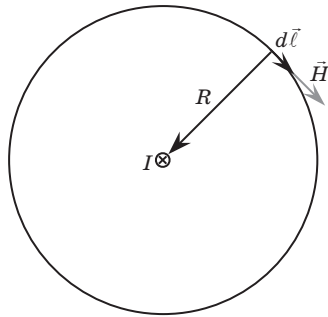


Рис. 44.2. Циркуляция вектора \vec{B} по окружности

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Учитывая связь магнитной индукции с напряженностью магнитного поля, получаем формулу магнитной индукции от бесконечно длинного провода:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иродов И. Е.* Электричество и магнетизм: основные законы. М., 2005.
2. *Калашников С. Г.* Электричество: учеб. пособие. М., 2003.
3. *Савельев И. В.* Курс общей физики: учеб. пособие: в 3 т. Т. 2: Электричество и магнетизм. Колебания и волны. Оптика. М., 2014.
4. *Савельев И. В.* Курс физики: учеб. пособие: в 3 т. Т. 2: Электричество и магнетизм. Колебания и волны. Волновая оптика. М., 2008.
5. *Трофимова Т. И.* Курс физики: учеб. пособие. М., 2007.
6. *Фрш С. Э., Тиморева А. В.* Курс общей физики: учебник: в 3 т. Т. 2. М.; Л., 1962.

СОДЕРЖАНИЕ

Электричество	5
1. Взаимодействие электрических зарядов. Закон сохранения заряда	5
2. Напряженность и потенциал электрического поля ...	9
3. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности....	12
4. Связь напряженности и потенциала электрического поля.....	16
5. Напряженность и потенциал электрического диполя	17
6. Электрический диполь во внешнем поле	21
7. Теорема Гаусса для вектора \vec{E}	24
8. Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей	30
9. Равновесие зарядов на проводниках.....	40
10. Диэлектрики	43
11. Теорема Гаусса для вектора \vec{D}	48
12. Граничные условия для векторов \vec{D} и \vec{E}	49
13. Преломление силовых линий и линий индукции на границе раздела диэлектриков	52
14. Емкость	53
15. Соединение конденсаторов в батарее	56
16. Энергия электрического поля	60
17. Электрический ток	63
18. Закон Ома в обыкновенной и дифференциальной формах	66
19. Параллельное и последовательное соединение проводников.....	69
20. Закон Джоуля – Ленца в обыкновенной и дифференциальной формах.....	72
21. Электрический ток в цепи с источником.....	75
Магнетизм	79
22. Историческая справка	79
23. Магнитная индукция. Сила Ампера	80
24. Закон Био – Савара – Лапласа. Принцип суперпозиции	82
25. Магнитная индукция прямого проводника с током. Взаимодействие проводников с токами.....	85

26. Магнитная индукция летящего электрического заряда. Сила Лоренца	88
27. Взаимодействие движущихся электрических зарядов	90
28. Движение заряженных частиц в магнитном поле....	92
29. Магнитная индукция контура с током.....	94
30. Контур с током во внешнем магнитном поле.....	99
3. Потенциальная энергия рамки с током в магнитном поле.	101
31. Теорема о циркуляции вектора \vec{B}	103
32. Магнитное поле тороида и соленоида	106
33. Механическая работа в магнитном поле. Магнитный поток.....	109
34. Теорема Гаусса для вектора \vec{B}	112
35. Магнитное поле в веществе. Теорема о циркуляции вектора \vec{H}	114
36. Граничные условия для векторов \vec{B} и \vec{H}	118
37. Виды магнетиков	121
38. Электромагнитная индукция. Закон Фарадея. Напряжение на концах провода в магнитном поле .	126
39. Самоиндукция	128
40. Взаимная индукция	129
41. Энергия катушки индуктивности с током	132
42. Энергия магнитного поля	133
43. Уравнения Максвелла.....	135
44. Некоторые следствия из уравнений Максвелла.....	138
Литература	141

Учебное издание

Коваленко Иван Иванович

КУРС ФИЗИКИ

Часть 3

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Учебное пособие

ISBN: 978-5-8088-1480-6



9 785808 814806

Редактор *В. А. Черникова*
Компьютерная верстка *Н. Н. Каравановой*

Подписано к печати 21.05.20. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 9,0. Тираж 50 экз. Заказ № 137.

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67