1.1 Найти значение матричного многочлена $(1E-2A)\cdot B$, если

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 6 & 2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -6 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 15\\ 4 & -5 & -15\end{pmatrix}$$

$c_{11}=5\cdot(-1)+0\cdot 2=-5$

$c_{12}=5\cdot 0+0\cdot 5=0$

$c_{13}=5\cdot 3+0\cdot(-3)=15$

$c_{21}=(-6)\cdot(-1)+(-1)\cdot 2=4$

$c_{22}=-6\cdot 0-1\cdot 5=-5$

$c_{23}=-6\cdot 3+3=-15$

Ответ: $\begin{pmatrix}-5 & 0 & 15\\ 4 & -5 & -15\end{pmatrix}$

1.2. Вычислить определитель двумя способами, по правилу треугольника и разложением по строке (или столбцу):

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-1) + 2\cdot 3\cdot(-2) + 1\cdot(-1)\cdot(-2) -$

$- 3\cdot 2\cdot 1 - 2(-1)\cdot(-1) - 1\cdot 0\cdot(-2) =$

$= -12 - 2 - 6 - 2 = -22$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 6 + (-2) - 12 - 2 = -22$

1.3. Найти матрицу обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{3}{5} & -0{,}8 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0{,}4 & -0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}15 & -0{,}2 & 0{,}25 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}25 & 0 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}15 & -0{,}2 & 0{,}25 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}6 & -0{,}25 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}25 & 0 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}15 & -0{,}2 & 0{,}25 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = E$$

$$C_{11} = 1 \cdot \frac{1}{20} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{20} = 1$$

$$C_{12} = 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot -\frac{1}{5} = 0$$

$$C_{13} = 0$$

$$C_{21} = 0$$

$$C_{22} = 2 \cdot \frac{3}{5} - 1 \cdot 0 - 1 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

$$C_{33} = -1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

1.4. Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами: по формуле Крамера, с помощью обратной матрицы, методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \\ 1x_1 + 2x_2 + (1-2)x_3 = 1^2 \cdot 2^2 - 1 + 2 \\ (1+2)x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \end{cases}$$

1.4.1 Метод Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + (-1)x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 10$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -20$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 20$$

$x_1 = 2$
$x_2 = 1$
$x_3 = -2$

1.4.2 Метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \text{Стр } 1 + \text{Стр } 2 = \text{Стр } 1 \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 11 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 11 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \\ 5 & 5 & 0 & 15 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -2$

1.5. Даны комплексные числа $z_1 = 2+1i$; $z_2 = 1-2i$. Вычислить z_1+z_2, z_1-z_2; $z_1 \cdot z_2$; $z_2 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1+z_2)^2$

$z_1 + z_2 = 2+i+1-2i = 3-i$

$z_1 - z_2 = 2+i-(1-2i) = 1+3i$

$z_1 \cdot z_2 = (2+i)(1-2i) = 2+2+i-4i = 4-3i$

$z_2 \cdot z_2 = (1-2i)(1-2i) = \cancel{1+4=5}\ (1 \cdot 1) + (1 \cdot (-2)i) +$

$+ ((-2)i \cdot 1) + ((-2)i \cdot (-2)i) = -3-4i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2-2+i+4i}{5} = i$

$(z_1+z_2)^2 = (3-i)(3-i) = 8-6i$

1.6 Даны числа $z_1 = 2$; $z_2 = -2$; $z_3 = 3i$

$z_4 = -i$ $z_5 = 2\sqrt{3}+2i$; $z_6 = -1\sqrt{3}+i$ $z_7 = -1-1i$

$z_8 = 2-2\sqrt{3}\,i$ Изобразить числа на комплексной плоскости, найти модули и аргумент, записать в тригонометрической и показательной форме.

$|z_1| = 2$ $\varphi_1 = arctg\,\frac{0}{2} = 0$

$|z_2| = 2$ $\varphi_2 = \pi$ $A_{g}\varphi = \frac{Im\,z}{Re\,z}$

$|z_3| = 3$ $\qquad \varphi_{z_3} = arctg\left(\frac{3}{0}\right) = arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$

$|z_4| = 1$ $\qquad \varphi_{z_4} = -\frac{\pi}{2}$

$|z_5| = \sqrt{2^2 + 2\sqrt{3}^2} = 4$ $\qquad \varphi_{z_5} = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$|z_6| = \sqrt{3+1} = 2$ $\qquad \varphi_{z_6} = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$|z_7| = \sqrt{2}$ $\qquad \varphi_{z_7} = \frac{\pi}{4}$

$|z_8| = 4$ $\qquad \varphi_{z_8} = arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

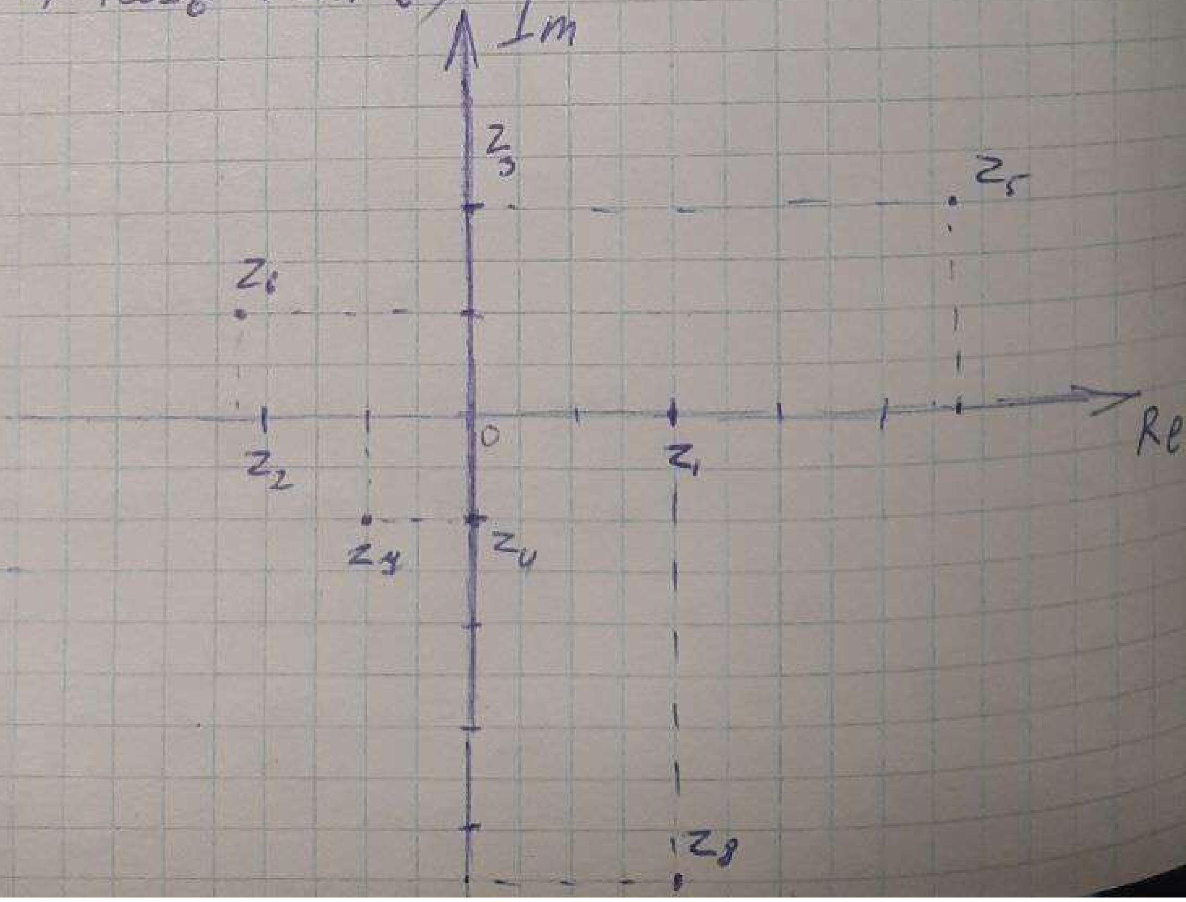
$z_1 = 2\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$ $\qquad z_6 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z_2 = 2\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)$ $\qquad z_7 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z_3 = 3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad z_8 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z_4 = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$z_5 = 4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$



1. Дани числа $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$z_2 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right)$

Вычислить $z_1 \cdot z_2$ $\frac{z_1}{z_2}$; z_1^{10}

$$z_1 \cdot z_2 = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \left(1\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(2\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{4}\right)\right) = 2\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\cancel{z_1^{10} = \left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right)^{10}}$$

$$z_1^{10} = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{2} + i\sin\frac{10\pi}{2}\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)\right)$$

2.1 Построить треугольник, вершины которого находятся в точках $A(1+1; 2+1) = (2; 3)$ $B(1; -2)$ $C(-1; 2)$ и найти:

1) уравнение стороны AB

2) уравнение медианы, проведенной из вершины C

3) координаты точки пересечения медиан

4) уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AC и ее длину

5) уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB.

6) Площадь треугольника.

1) $\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-3}{-2-3}$

$2 - x = \frac{1}{5}(3-y)$

$10 - 5x = 3 - y$

$-y = -5x + 7$

$y = 5x - 7$

2) $x_M = \frac{x_B + x_A}{2} = \frac{3}{2}$

$y_M = \frac{y_B + y_A}{2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{x+1}{\frac{3}{2}-1}=\frac{y-2}{\frac{1}{2}-2}$$

$$2(x+1)=-\frac{2}{3}(y-2)$$

$\Rightarrow 6(x+1)=-2y-4$

$6x+6=-2y-4$

$y=-3x-10$

3) $x_m=\frac{x_B+x_C}{2}=0$

$y_m=\frac{y_B+y_C}{2}=0$

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{3-0}$$

$3x=2y$

$y=6x$

$$\begin{cases} y=6x \\ y=-3x-10 \end{cases}$$

$6x=-3x-10$

$9x=-10$

$x=0,9$

$y=5,4$

4) $$\frac{x-2}{--2}=\frac{y-3}{2-3}$$

$$\frac{x-2}{-3}=-(y-3)$$

$x-\cancel{3}=3y-9$

$x=3y-6$

$y=\frac{1}{3}x-2$ или $x-3y-6=0$

$\vec{N}=(1;-3)$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-3}$$

$$-3x+3=y+2$$

$$\underline{y=-3x+1}$$

5) $$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-3}{-2-3}$$

$$5(x-2)=y-3$$

$5x-7=y$ или $y-5x+7=0$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

$A=-5 \quad B=1 \quad x_0=-1 \quad y_0=2$

$$-5(x+1)+(y-2)=0$$

$$-5x-5+y-2=0$$

$$\underline{y=5x+7}$$

6) $$S_\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}$$

$x_1=2 \qquad x_2=1 \qquad x_3=-1$

$y_1=3 \qquad y_2=-2 \qquad y_3=2$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 2\end{vmatrix}=\underline{7}$$

2.2 Даны вершины треугольной пирамиды $S(1;2;3)$ $A(2;-2;-1)$ $B(-2;2;-2)$ $C(-2;-1;-3)$ Найти

1) Угол между ребрами $\overline{BS}$ и $\overline{BC}$

2) Площадь грани ABC

3) Объем пирамиды $SABC$

4) Длину высоты, опущенной из вершины S на грань ABC

5) Угол между ребром SC и гранью ABC

6) Уравнение высоты, опущенной из вершины S на грань ABC

1) $\vec{BS} = \{1+2;\ 2-2;\ 3+2\} = \{3;0;5\}$

$\vec{BC} = \{-2+2;\ -1-2;\ -3+2\} = \{0;-3;-1\}$

$\varphi = \arccos\left[\frac{BS\cdot BC}{|BS|\cdot|BC|}\right] =$

$= \arccos\left[\frac{3\cdot 0 + 0(-3) + (-5)}{\sqrt{9+25}\cdot\sqrt{10}}\right] =$

$= \arccos\left[-\frac{5}{\sqrt{340}}\right] = \arccos\left[-\frac{5}{2\sqrt{85}}\right] \approx 105^\circ$

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$\vec{AB} = \{-4; +4; -1\}$

$\vec{AC} = \{-4; 1; -2\}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} i & y & k \\ -4 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right\| = \left|\left(-8\vec{i} - 4\vec{y} - 4\vec{k} + \vec{i} - 8\vec{y} - 16\vec{k}\right)\right| \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-\vec{7}; -\vec{12}_y - 20\vec{k}\right| = \frac{1}{2}\left|\sqrt{49 + 144 + 400}\right| = \sqrt{593}$$

3) $V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{AC} * \vec{AB} * \vec{AS}\right)\right| =$

$\vec{AC} = \{-4; 1; -2\}$

$\vec{AB} = \{-4; -4; -1\}$

$\vec{AS} = \{-1; 4; 4\}$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$\Delta = -(4^3) + 1 + 32 - 16 + 16 - 8 = 25 - 4^3 =$

$= 25 - 64 = -39$

$\frac{1}{6}|-39| = \frac{39}{6} = \frac{13}{2} = 6{,}5$

4) $h = \frac{3 \cdot 6{,}5}{\sqrt{593}} \approx 0{,}8$

5) $\frac{x+2}{1+2} = \frac{y+1}{2+1} = \frac{z+3}{3+3}$

$\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{6}$

$x + 2 = y + 1 = \frac{z+3}{2}$

$2x+4=2y+2=z+3$

$\cancel{2x+4=} \Rightarrow k=3 \quad l=3 \quad m=6$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z+1 \\ -2-2 & 2+2 & 1-2 \\ -2-2 & -1+2 & -3+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z+1 \\ -4 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-2)(-8+1)+(y+2)(4-8)+(z+1)(-4+16)=0$

$7x-14-4y-8+12z+12=0$

$7x-4y+12z-10=0$

$A=7 \quad B=-4 \quad C=12$

$k=3 \quad l=3 \quad m=6$

$$\sin\alpha = \frac{7\cdot 3+(-4)\cdot 3+12\cdot 6}{\sqrt{49+16+144}\cdot\sqrt{9+9+36}} =$$

$$= \frac{1}{66}\cdot\sqrt{1254} \approx \underline{0,5365}$$

$$\alpha \approx \underline{32,4^\circ}$$

б) $h: \dfrac{x-x_s}{k} = \dfrac{y-y_s}{l} = \dfrac{z-z_s}{m}$

$\dfrac{A}{k} = \dfrac{B}{l} = \dfrac{C}{m}$ – условие перпендикулярности прямой

$A=7 \quad B=-4 \quad C=12$

$$\frac{7}{k} = \frac{-4}{l} = \frac{12}{m}$$

$$7 = -4\frac{k}{l} = \frac{12k}{m}$$

$$-4\frac{k}{l} = 7 \qquad 12k = 7m$$

$$-4k = 7l \qquad 4k = \frac{7m}{3}$$

$$-l = \frac{m}{3}$$

$$\frac{4}{3}m = \frac{12}{m}$$

$$\frac{4}{3}m^2 = 12$$

$$4m^2 = 36$$

$$m^2 = 9$$

$$\left(\begin{matrix} m = \pm 3 & l = \pm 1 \\ k = \pm\frac{7}{4} & \end{matrix}\right)$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{7} = \frac{7(z-3)}{4}$$