1.1 Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1^2 \cdot x^{1+2} + (1-2)x^2 - 2}{2^2 x^{2+2} + (1+2)x + 1^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 - 4}{4x^4 + 3x + 1} \to \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^4} - \frac{x^2}{x^4} - \frac{4}{x^4}}{\frac{4x^4}{x^4} + \frac{3x}{x^4} + \frac{1}{x^4}} \to$$

$$\to \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^4}}{4 + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}} \to \frac{0}{4} \to 0$$

2.2. Вычислить предел $\lim_{x\to\frac{2}{1}} \frac{1\cdot 2x^2 - (1^2+2^2)x + 1\cdot 2}{\sqrt{2\cdot 1x} - \sqrt{1x+2}}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2(x-\frac{1}{2})(x-2)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}{2x-(x+2)} \to$$

$$\to \lim_{x\to 2} \frac{(2x-1)(x-2)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}{2x(x-2)} \to$$

$$\to \lim_{x\to 2} (x-\frac{1}{2})\cdot(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}) \to \frac{3}{2}\cdot 4 \to 6$$

2.3 Вычислить предел $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1x+2}{1x-2}\right)^{(1+2)x}$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{3x} \to \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x-2)+4}{x-2}\right)^{3x} \to$$

$$\to \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-2}{x-2} + \frac{4}{x-2}\right)^{3x} \to \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{3x} \to$$

$$\rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{x-2}}{4}\right)^{3x} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{\frac{1}{x-2}}{4}\right)^{\frac{x-2}{4}}\right]^{\frac{4}{x-2}\cdot 3x} \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12}{1-\frac{2}{x}}} \Rightarrow e^{12}$$

1.4. В точках $x_1=0$ и $x_2=2$ для функции $f(x)\frac{1}{2^{\frac{2}{x}}-2}$ установить непрерывность или определить характер точки раз.

· если $x\to 0-0$, то $\frac{2}{x}\to-\infty$, $2^{\frac{2}{x}}\to 0$

тогда предел слева $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{2^{\frac{2}{x}}-2}=-\frac{1}{2}$

· если $x\to 0+0$, то $\frac{2}{x}\to\infty$, $2^{\frac{2}{x}}\to\infty$,

тогда предел справа $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{2^{\frac{2}{x}}-2}=0$.

Т.к. пределы конечны, но не равны, то в точке $x_1=0$ функция имеет разрыв 1-ого рода.

· если $x\to 2-0$, то $\frac{2}{x}\to 1+0$, $2^{\frac{2}{x}}\to +0$,

тогда $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{1}{2^{\frac{2}{x}}-2}=\infty$

· если $x\to 2+0$, то $\frac{2}{x}\to 1-0$, $2^{\frac{2}{x}}-2\to -0$,

тогда $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{1}{2^{\frac{2}{x}}-2}=-\infty$

Т.к. пределы равны $\pm\infty$, то в точке $x_2=2$ функция $f(x)$ имеет разрыв 2-ого рода.

1.5. Найти производную функции

$y = (x^2 + x^1) * \sqrt[2]{x^1} + \frac{2^x}{\cos x} + 1 * 2$

1) $\left((x + x^2) x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} (5x + 3)$

2) $\left(\frac{2x}{\cos x}\right)' = \frac{(2^x)' \cos x}{\cos^2 x} - \frac{(\cos x)' 2^x}{\cos^2 x} =$

$= \frac{2^x \ln 2}{\cos x} + \frac{2^x \sin x}{\cos^2 x} = 2^x \left(\frac{\ln 2}{\cos x} + \frac{\mathrm{tg} x}{\cos x}\right)$

$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot (5x + 3) + \frac{2^x}{\cos} (\ln 2 + \mathrm{tg}\, x)$

1.6. Найти производную функции.

$y = \frac{3 \cdot 1}{x^2} = \frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$

$y' = -6x^{-3}$

1.7. Найти производную ф-ии $y = 2x^{\sin x}$, применяя метод логарифмического диф.

$y = 2x^{\sin x}$

$\ln y = \sin(x) \ln(2x)$

$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(2x) + \sin x \cdot (\ln 2x)' =$

$= \ln 2x \cdot \cos x + \frac{2}{2x} \sin x$

$y' = (\ln(2x) \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x} \sin x) 2x^{\sin x}$

1.8. Найти производную функции, заданной неявно: $e^{x+2y} - 2\frac{x}{y} = 2$

Возьмем производную $\frac{d}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x+2y} - 2\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$e^{2y} \cdot e^{x} \cdot (2y+x)' - (2y - 2xy') \cdot \frac{1}{y^2} = 0$$

$$e^{2y+x}(2y'+1) - \frac{2}{y^2}(y - xy') = 0$$

$$y'\left(2e^{2y+x} - \frac{2x}{y^2}\right) = -e^{2y+x} + \frac{2}{y}$$

$$y' = \frac{2y^{-1} - e^{2y+x}}{2e^{2y+x} - \frac{2x}{y^2}}$$

1.9 Найти производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln(1t) + 2t + 1 \\ y = 2t^2 + 2t + 2 \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$y'_t = 4t + 2$$

$$x'_t = \frac{1}{t} + 2$$

$$y'_x = \frac{4t+2}{t^{-1}+2} = \frac{4t^2+2t}{2t+1} = \frac{2t(2t+1)}{2t+1} = 2t$$

1.10. С помощью методов дифференциального исчисления исследовать и построить график функции $y = \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2-2^2}$

1) Область определения

$(x-1)^2 - 4 \neq 0$

$x^2 - 2x + 1 - 4 \neq 0$

$x \in (-\infty; +1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$

2) Четность, нечетность, периодичность ф-ии.

$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2} = -y(x)$ — ф-ия нечетная, непериодическая

3) Точки пересечения с осями координат

$Ox: y=0 \quad \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2-2^2} = 0 \quad x = 1$

$Oy: x=0 \quad \frac{(0-1)^3}{(0-1)^2-2} = -\frac{1}{1-4} = \frac{1}{3}$

Точки: $(0; \frac{1}{3}), (1; 0)$

4) Точки разрыва ф-ии и асимптоты графика.

$\lim\limits_{x \to -1+0} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2-2^2} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2+0} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2-2^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1-0} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2-2^2} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2-0} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2-2^2} = -\infty$

В точках $x=-1$ $x=2$ $y(x$ испытывает разрыв 2-го рода.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \frac{(x-1)^3}{x((x-1)^2-4)} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} y(x)-x = \frac{(x-1)^3-((x-1)^2+4)}{(x-1)^2-4} = -1$$

Асимптота вдоль прямой $y=x-1$

5) Исследование ф-ии на экстремум.

$$y'(x) = \left(\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2-4}\right)' = \frac{3(x-1)^2\times(x+1)(x-3)-(x-1)^3\times((x+1)+(x-3))}{((x-1)^2-4)^2}$$

$$y'(x) = \frac{3(x-1)^2\times(x+1)(x-3)-(x-1)^3(x-1)\times 2}{((x-1)^2-4)^2}$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 1-2\sqrt{3}$

$x_3 = 1+2\sqrt{3}$

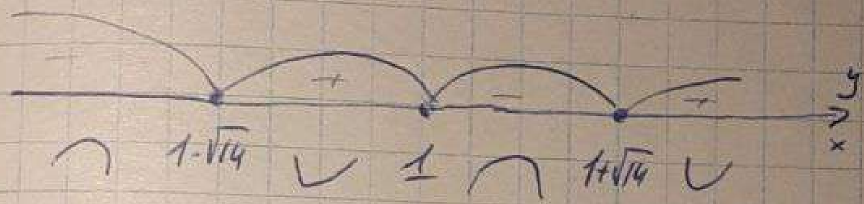
На промежутках $(-\infty; 1-2\sqrt{3}) \cup (1+2\sqrt{3}; +\infty)$ ф-ия возрастает

На промежутках $(1-2\sqrt{3}; 1)(1; 1+2\sqrt{3})$ ф-ия убывает.

6) Исследования на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба.

$$y''(x) = \frac{8(x-1)(x^2-2x+13)}{(x^2-2x-3)^3}$$

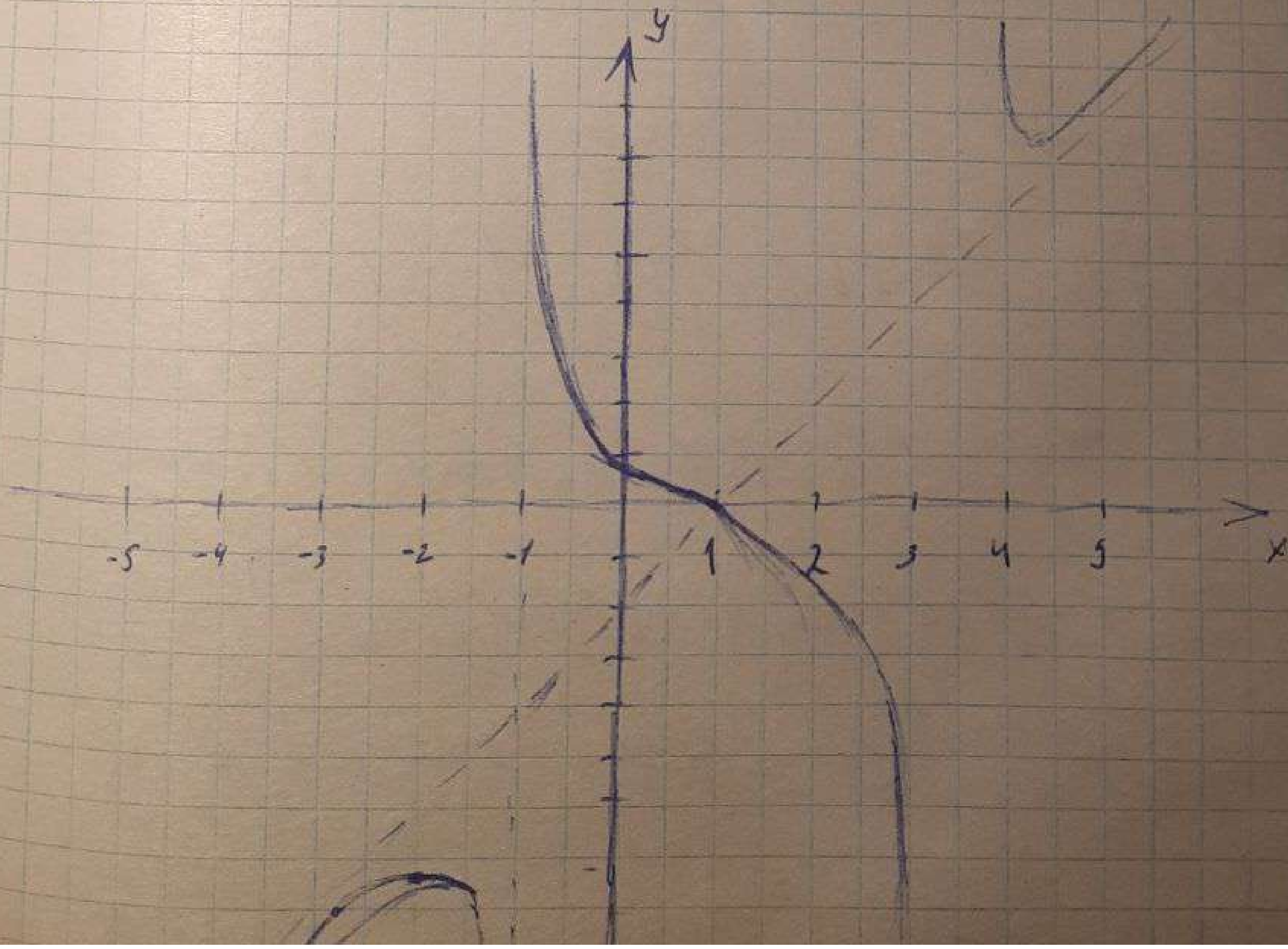
$y''(x) = 0$ при $x=1$ $x = 1+\sqrt{14}$ $x = 1-\sqrt{14}$



10.7 Построение графика ф-ции

$$y(x) = \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2-2^2}$$

x	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$-\frac{27}{4}$	$-5\frac{1}{3}$	$-5\frac{2}{3}$	$\pm\infty$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\pm\infty$	$5\frac{2}{5}$



1.11 Найти интеграл $\int \frac{x^1 dx}{\sqrt{2+1+x^{1+1}}}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{3+x^2}} dx = \int \sqrt{3+x^2}^{-1} dx^2 \underset{\substack{x^2 \Rightarrow t \\ dt = 3dx}}{=} \int \frac{1}{2} \sqrt{3+t}^{-1} dt =$$

$$\underset{\substack{3+t=v \\ dv=dt}}{=} \int \frac{1}{2} \sqrt{v}^{-1} dv = \frac{1}{2} \int v^{-\frac{1}{2}} dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{v} + const =$$

$$= \frac{2}{2} \sqrt{v} + const = \frac{2}{2} \sqrt{3+t} + const = \frac{2}{2} \sqrt{3+x^2} + const =$$

$$= \sqrt{3+x^2} + const$$

1.12 Найти интеграл $\int (x+1) \cdot e^{-2x} dx$

$$-\frac{1}{2} \int (x+1) de^{-2x} = \left\{ \int u dv = uv - \int v du \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x+1)e^{2x} + \left(-\frac{1}{4} e^{-2x}\right) = \left(-\frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}\right) e^{-2x}$$

1.13. Найти интеграл $\int \frac{2x+1^2+\cancel{2}^2}{x^3 - (2 \cdot 2x^2) + (1^2+2^2)x} dx$

$$= \frac{2x^2+5}{x^3-4x^2+5x} dx = \left\{ x^3 - 4x^2 + x(x^2-4x+5) \right\} =$$

$$\int \frac{A}{x} dx + \int \frac{Mx+N}{x^2-4x+5} dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+4}{x^2-4x+5} dx =$$

$$= \ln x + \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2-4x+5} + \int \frac{4}{x^2-4x+5} dx$$

1.14 Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin(mx)+2+1}$

$$\int \frac{dx}{\sin x+3} = \left\{ tg\frac{x}{2}=t;\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \right\} =$$

$$= \int \left(\frac{2t}{1+t^2}+3\right)^{-1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dx = \int \frac{2}{3t^2+2t+3}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{36-4}} \cdot arctg\left[\frac{6t+2}{\sqrt{32}}\right] + const =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{32}} \cdot arctg\left[\frac{tg\frac{x}{2}+2}{\sqrt{32}}\right] + \overline{const}$$

1.15. Построить схематический чертеж и найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2+1x+2^2$, $(1\cdot 2+2^2)x-(1+2)y+1^2\cdot 2-2^3=0$

$$\begin{cases} y=x^2+x-4 \\ 6x-3y+2-8=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x^2+x-4 \\ y=2x-2 \end{cases}$$

Точки пересечения:

$$\begin{cases} y=x^2+x-4 \\ y=2x-2 \end{cases}$$

$2x-2=x^2+x-4$

$x^2-x-2=0$

$x_1=2$

$x_2=-1$

$$S=\int_{-1}^{2}\left[-x^2+x+2\right]dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=-\frac{8}{3}+\left(\frac{-1}{3}\right)^3+\frac{2^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}+2\cdot 2-2\cdot(-1)=$$

$$=-\frac{8}{3}-\frac{1}{3}+2-\frac{1}{2}+6=4{,}5=\frac{9}{2}$$

1.16. Вычислить интеграл или установить его расходимость $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{(2^2+x^2)\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}$

Проверим на сходимость

1) Вычислим неопределенный интег.

$$\int\frac{dx}{(4+x^2)(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right))}=\left\{d\,\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{dx}{4+x^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}}\int\frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}\,d\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|+const$$

2) Найдем предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\pi}{2}\right|$$

Интеграл сходится.

$\frac{1}{2}\ln|\operatorname{arctg}(\frac{x}{2})| \Big|_{2}^{\infty} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\pi}{2}\right| - \ln\left|\frac{\pi}{4}\right|\right] =$

$= \frac{1}{2}\ln 2$

Ответ $\frac{\ln|2|}{2}$